Лекция 3

Использование отображений. Динамика по битовым маскам. Динамика по профилю.

Сергей Леонидович Бабичев

Использование отображений.

Использование отображений

- Пока решались задачи, требующие одного или двух целочисленных аргументов.
- Не все задачи такие.

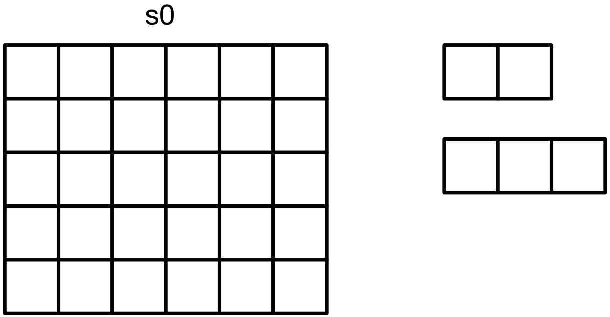
Использование отображений

Задача о покрытии.

- Имеется прямоугольник размером $N \times M$.
- Сколькими способами его можно замостить фигурами 1×2 и 1×3? Симметрии и повороты различаются.

Использование отображений

- Задача о разбиении прямоугольника.



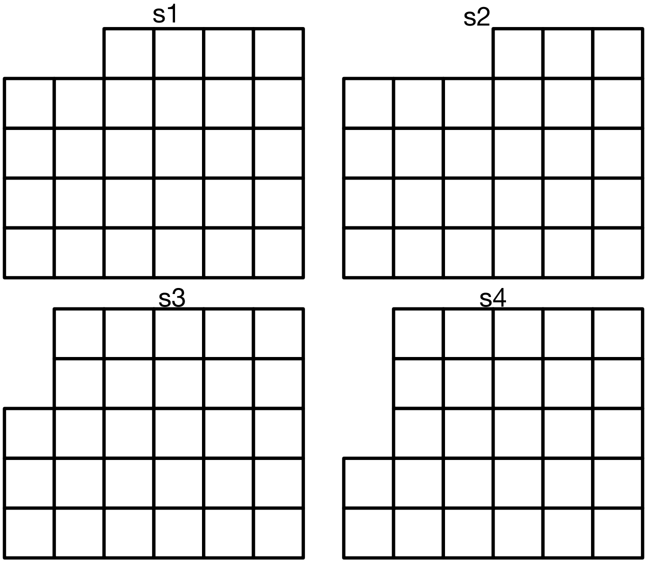
Использование отображений

Можно ли решить задачу методом динамического программирования?

- Обозначим через $f(s)$ количество разбиений фигуры s на требуемые фрагменты
- Тогда $f(s_0) = f(s_1) + f(s_2) + f(s_3) + f(s_4)$, где s_i — подфигуры, получающиеся вычитанием одного из фрагментов, содержащих крайнюю левую верхнюю точку.

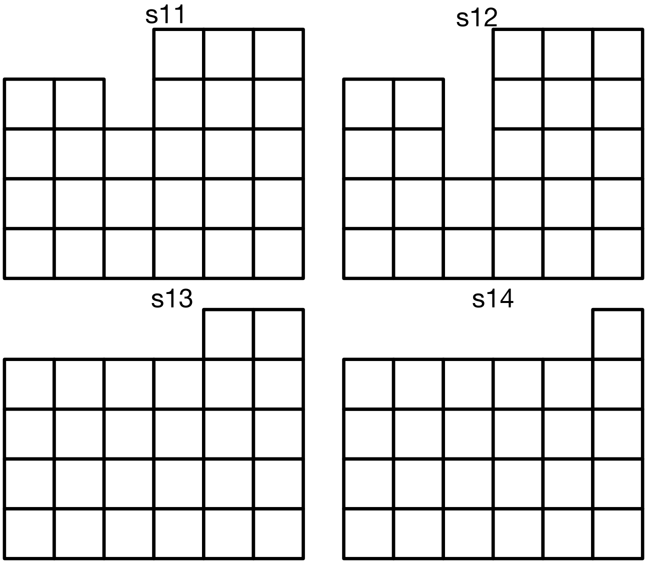
Использование отображений

- Возможные подзадачи.



Использование отображений

- $f(s_1) = f(s_{11}) + f(s_{12}) + f(s_{13}) + f(s_{14})$



Использование отображений

- При предложенном алгоритме решения одна подзадача может возникнуть при различных путях:

s’

1	1	2	2	3	3
4	4	5	5	6	6

s”

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

s’”

1	1	1	2	2	2
3	3	3	4	4	4

Использование отображений

- Решение таких подзадач не зависит от истории их получения.
- Если имеется отображение аргументов подзадачи (позиции) на результат, то задача может быть решена методом динамического программирования.

Использование отображений

- Что есть $f(s)$, если s не является числом?
- s есть объект, который мы должны использовать в виде ключа key в отображении.
- $value$ в отображении есть значение, хранимое по этому ключу.
- Требуется создать *взаимно однозначное* соответствие объекта какому-то набору битов.
- В данной задаче можно пронумеровать все 30 элементов и каждому из номеров присвоить 1, если он присутствует и 0, если отсутствует.
- Размер множества возможных ключей есть 2^{30}, что слишком много для восходящего метода.

Использование отображений

- Воспользуемся изученной абстракцией отображения.
- Каждая из позиций является ключом в отображении.
- Задача решается нисходящим динамическим программированием с мемоизацией.
    1. При решении задачи из таблицы решений по ключу, соответствующему текущей позиции, извлекается значение.
    2. Если такого ключа нет, то производится полное решение и в отображение добавляется пара (ключ/полученное значение)
    3. Если ключ имеется, то результатом подзадачи будет значение по ключу.

ДП по битовым маскам

Напоминание про битовые операции

- Компьютерное слово идеально подходит для представления небольших множеств.
- Операции *insert*, *erase*, *find* исполняются за $O(1)$ для множеств размером до 64 элемента.
- Операции объединения, пересечения, вычитания и проверки вложения тоже исполняются за $O(1)$.
  $A \cup B \leftrightarrow M_A | M_B$
  $A \cap B \leftrightarrow M_A \& M_B$
  $A \setminus B \leftrightarrow (M_A | M_B) \oplus M_B$
  $A \setminus B \leftrightarrow (M_A \& (\sim M_B)$
- Поиск старшего бита производится либо за $O(W)$, либо за $O(1)$ после предподсчёта (RMQ).
- Подсчёт количества ненулевых битов (размер множества) — за $O(\log W)$.

Задача про поиск количества путей в графе

Задача 1. Ориентированный невзвешенный граф задан матрицей смежности. Найти количество путей длины ровно в k из произвольного u в произвольное v.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача про поиск количества путей в графе

- Исходная матрица представляет пути длины 1.
- Предположим, что мы имеем матрицы всех путей от 1 до $k-1$.
- Что такое путь из u в v длины ровно k? Это сначала путь длины $k-1$ до некоторого i, затем ровно одно ребро от i до v.
- Перебираем все предпоследние вершины на пути из u в v.
- Это декомпозиция на подзадачи.
- Консолидация — сложение результатов всех подзадач.
- Общее количество есть сумма количеств таких путей по размеру матрицы.

$$(M^k)_{uv} = (M^{k-1} \cdot M)_{uv} = \sum_{i=1}^{n} (M^{k-1})_{ui} \cdot M_{iv}$$

- Таким образом общее количество путей есть $(M^k)_{uv}$.

Задача про поиск количества путей в графе

- Произведение матриц размером N имеет сложность $O(N^3)$.
- Возведение матрицы в степень k имеет сложность $O(N^3)\log k$.
- Это и есть сложность задачи.

Задача про поиск количества путей в графе

Задача 2. Ориентированный невзвешенный граф задан матрицей смежности. Найти количество путей длины не более k из произвольного u в произвольное v.

- Используем решение предыдущей задачи.
- Это сумма матриц. $S_l = M^1 + M^2 + \ldots M^k$.
- Какова сложность задачи сложения степеней матриц?

Задача про поиск количества путей в графе

- Разобьём задачу на подзадачи, как при возведении в степень.
- Если k — чётное, то $S_k = S_{k/2} + A^{k/2} \cdot S_{k/s}$.
- Если k — нечётное, то $S_k = S_{k-1} + A_k$.
- Обозначим E — единичная матрица, $\mathbb{O}$ — нулевая матрица.
- Будем получать в алгоритме сразу две матрицы — A и S.
- Алгоритм $f(A, k)$ возвращает пару из матрицы A и суммы S.
- Пусть $B = f(A, k-1), C = B.1 \cdot A$

$$f(A,k) = \begin{cases} \{E, \mathbb{O}\}, & \text{если } k = 0 \\ \{C, B.2 + C\}, & \text{если k нечётно} \\ \{C \cdot C, (E + C) \cdot B.2\}, & \text{если k чётно} \end{cases}$$

Динамика по битовым маскам.

Наименьший гамильтонов цикл

Задача 3. Дана неориентированная клика размером N и все расстояния между вершинами в виде матрицы. Найти путь наименьшего суммарного веса, начинающийся в произвольной вершине и посещающий все вершины строго по одному разу.

Решение. Декомпозиция: если у нас имеются решённая подзадача: найден какой-то путь на подмножестве вершин, то чтобы его продолжить последовательность переходов не важна. Важно множество вершин. Но на этом множестве стоимость зависит от порядка посещения.

- Имеются подзадачи.
- Имеется порядок на подзадачах — размер множества.
- Подзадачи совпадают по аргументам.
- Каждая подзадача несколько проще задачи.
- Консолидация — выбор наименьшей из подзадач.
- Имеются терминальные подзадачи.
- Значит есть динамика.

Наименьший гамильтонов цикл — уравнение Беллмана

Уравнение Беллмана есть наименьший вес пути, содержащегося в маске s и заканчивающегося в v.

$$f(s,v) = \begin{cases} 0, \text{ если } |S| = 1 \cap v \in S \\ \min\limits_{u \in S - v} c_{vu} + f(S - v, u) \end{cases}$$

Аргументы: маска подграфа s, конечная точка пути v.

Задача про поиск максимальной клики

Задача 4. Имеется невзвешенный неориентированный граф, заданный матрицей связности. Найти максимальную по множеству клику графа.

Задача про клику: решение 1

- Пусть битовая маска s здесь и в других решениях представляет множество исследуемых вершин.
- Тогде можно перебрать все маски от 0 до $2^N - 1$ и для каждой проверить, является ли она кликой.
- Всего 2^N проверок.
- Стоимость каждой проверки N^2.
- Общая сложность $O(2^N \cdot N^2)$.
- Битовые маски есть, динамики нет.

Задача про клику: решение 2

- Динамика по битовым маскам.
- Нужно найти порядок на подзадачах.
- Для маски s выделяем подзадачи:
  - для каждой вершины $v \in s$ проверяется, есть ли рёбра до всех вершин в маске и является ли маска $s - v$ кликой.
- База: пустая маска является кликой.

Уравнение Беллмана

$$f(s) = \begin{cases} true, & \text{если } s = \emptyset \\ true, & \text{если для произвольного } v \in s \forall u \in s : c_{vu} \neq 0 \\ false & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Сложность $O(2^N \cdot N)$.
Ответ — максимальная по мощности маска, для которой $f(s) = true$.

Задача про клику: решение 3

- Найдём ещё больший порядок на подзадачах.
- Мы перебирали все $v \in s$.
- Ограничимся одним узлом, определённым старшим битом — вершиной с наибольшим номером.
- Если для такой вершины все вершины в маске инцидентны, то маска $s - v$ есть клика, то кликой будет и s.
- Если для вершины v имеется маска её инцидентных вершин adj_v, то проверка на инцидентность есть: верно ли, что $adj_v \supset (s - v)$.
- Такая проверка занимает $O(1)$.
- Итого сложность $O(2^N)$.

Динамика по профилю.

Задача о раскраске прямоугольника

Задача 5. Имеется прямоугольный дворик, который можно замостить плитками одного размера, размером $M \times N$. Его хозяин решил каждый день укладывать плитку по-новому — благо, он владеет небольшим заводиком по производству таких плиток. Он надеется дожить до того дня, когда узоры начнут повторяться. Впрочем, у хозяина есть некая идиосинкразия – он терпеть не может, когда плитки одного цвета образуют квадрат 2×2.
Посчитайте, сколько дней потребуется, чтобы для заданных размеров двора исчерпать все возможные покрытия.

Задача о раскраске прямоугольника: решение

- Что есть подзадача?
- Например, раскрашенный прямоугольник с меньшим количеством столбцов.
- Какая информация потребуется для перехода?
- Цвет последнего закрашенного столбца.
- Так как предыдущая задача была решена, в более левой части дефектов нет.
- `XXX` – готовая часть, `???` — необработанная часть, `...` — зона перехода.

```
XX.??
XX.??
XX.??
XX.??
XX.??
```

Задача о раскраске прямоугольника: решение

- Значение функции Беллмана $f(k, s)$, где k — количество уже покрашенных столбцов, а s — цвет последнего столбца.
- Имея маску s, мы прикладываем к ней справа маску s'. Если в столбике $N \times 2$ нет плохих комбинаций — маска s' добавляется к хорошим решениям.
- `Ответ:` сумма количества всех масок в последнем столбце.
- Это одна из задач, которую заведомо удобнее решать восходящим методом.
- Асимптотика: маска s из N бит сопоставляется с маской s' из N бит. Всего комбинаций $2^N \times 2^N$. Одна комбинация проверяется за $O(N)$. Это надо сделать для $M - 1$ столбца. Итого

$$O(4^N \times N \times M).$$

- Можно предподсчитать логическую функцию $g(s, s')$ и сложность станет $O(4^N \times N)$.

Задача о раскраске прямоугольника: решение с передаточной функцией

- Пусть нам известен вектор значений функции Беллмана в $k-$м столбце.
- Тогда вектор значений в $k+1$-м столбце есть произведение матрицы перехода на вектор k.

$$\begin{pmatrix} f_{k+1,0} \\ f_{k+1,1} \\ f_{k+1,2} \\ \dots \\ f_{k+1,2^N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \dots & x_{0,n-1} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \dots & x_{1,n-1} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & \dots & x_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1,0} & x_{n-1,1} & \dots & x_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{k,0} \\ f_{k,1} \\ f_{k,2} \\ \dots \\ f_{k,2^N-1} \end{pmatrix}$$

$x_{s,s'} = 1$, если переход от маски s к маске s' осуществим и 0 иначе.

Задача о раскраске прямоугольника: решение с передаточной функцией

- Такая матрица перехода в теории управления называется *передаточной функцией*.
- Решение есть переход от маски s_0, в которой все состояния возможны, к маске s_M.
- Решение есть $M - 1$-я степень матрицы передаточной функции.
- Сложность теперь $O((2^N)^3 \times \log M) = O(8^M \log M)$.

Динамика по ломанному профилю

- Давайте двигаться слева-направо не по целым столбцам, а по одной клетке.
- База — самый левый столбец можно раскрасить как угодно.
- Обработанная часть теперь будет изломанна.
- `XXX` — обработанная часть, `@@@` — запомненный профиль, `???` — ещё не обработанная, `x` — обрабатываемая ячейка.

  ```
  XX.@?
  XX.@?
  XX@@?
  XX@x?
  XX@??
  ```

Динамика по ломанному профилю

- На каждом шаге обрабатывается ровно одна клетка.
- Её можно выкрасить в два цвета.
- Оба цвета нужно перебрать.
- Общая сложность

$$O(2^{N \times M})$$