Алгоритмы и структуры данных

Лекция 19
Числа.

Сергей Леонидович Бабичев

Проверка на простоту. Факторизация. Длинная арифметика.

Символ Лежандра

Definition (Символ Лежандра)

Символ Лежандра $\left(\frac{a}{m}\right)$

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } a - \text{ квадратичный вычет по модулю } m \\ -1, \text{ если } a - \text{ квадратичный невычет по модулю } m \\ 0, \text{ если } a \vdots m \end{cases}$$

Задача. Для большого n-чанкового числа x определить, является ли оно полным квадратом. Сложность операций сложения двух n-чаковых чисел $\Theta(n)$, операций умножения — $\Theta(n^2)$. Операции извлечения квадратного корня — нет. Придумайте способ, как для очень большого числа запросов получать ответы максимально быстро. Полагаем, что число правильных квадратов во входящей последовательности невелико.

Задача. Для большого n-чанкового числа x определить, является ли оно полным квадратом. Сложность операций сложения двух n-чаковых чисел $\Theta(n)$, операций умножения — $\Theta(n^2)$. Операции извлечения квадратного корня — нет. Придумайте способ, как для очень большого числа запросов получать ответы максимально быстро. Полагаем, что число правильных квадратов во входящей последовательности невелико.

Решение:

- Поймём, что сложность нахождения остатка от операции деления n-чанкового числа на короткое $\Theta(n)$.
- Составим таблицы $M_{i,j} = \left(\frac{a}{p_i}\right)$ для всех $a \in \mathbb{Z}_{p_i}$ по модулям $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$.
- Для каждого проверяемого числа x находим $x \bmod p_i$.
- Если табличное значение равно -1, то число — не точный квадрат.
- Если число не являлось точным квадратом, то каждая проверка завершит работу с вероятностью 0.5.
- После k проверок вероятность, точного квадрата будет 2^{-k}.

Задача. Хеш-таблица использует открытую адресацию с рехешированием. Для вновь пришедшего ключа вычисляется $h = H(key) \bmod S$, где S — размер таблицы. Если позиция h занята, вычисляется $h1 = H1(key) \bmod S$. После это делаются попытки вставить ключ в позиции $(h + h1) \bmod S$, $(h + 2 \cdot h1) \bmod S$, $(h + 3 \cdot h1) \bmod S$ — до успеха. Каким условиям должны удовлетворять S, h и $h1$, чтобы множество возможных точек вставки ключа было максимальным?

Алгоритм Диффи-Хеллмана

- Имеются два несекретных числа:
  - p — простое число;
  - g — первообразный корень по модулю p.
- Основан на том, что $g^{ab} \bmod p = g^{ba} \bmod p$ и невозможности за разумное время по известным $g^a \bmod p$ и $g^b \bmod p$ вычислить $g^{ab} \bmod p$ при больших p, a, b.
  Задача дискретного логарифмирования трудноразрешима.

Алгоритм Диффи-Хеллмана

- A и B хотят взаимно получить число, известное лишь им.
- Они выбрали $p = 13, g = 6$.
  - A выбирает произвольно приватный ключ $a = 10$.
  - A вычисляет $A' = g^a \bmod p = 6^{10} \bmod 13 = 4$ и посылает его B.
  - B выбирает произвольно приватный ключ $b = 3$.
  - B вычисляет $B' = g^b \bmod p = 6^3 \bmod 13 = 8$ и посылает его A
  - A вычисляет $s = B'^a \bmod p = 8^{10} \bmod 13 = 12$.
  - B вычисляет $s = A'^b \bmod p = 4^3 \bmod 13 = 12$.
- s — искомый секрет, известный лишь двоим.
- Всё остальное может быть известно всем.

Алгоритм RSA

1. Находится пара больших простых чисел P и Q
2. $N = P \cdot Q$.
3. $Z = (P-1)(Q-1)$.
4. Выбирается $E : \gcd(E, Z) = 1$.
5. Вычисляется $D : D = E^{-1} \pmod{Z}$
6. Пара $P = E, N$ — публичный ключ.
7. Пара $S = D, N$ — приватный (секретный) ключ.

$C_i = M_i^E \bmod N$ — шифрование
$M_i = C_i^d \bmod N$ — дешифрование

Корректрость RSA

Theorem

Пусть $N = pq$ *— произведение двух различных простых чисел,* e *и* d *— два натуральных числа, меньших* $(p-1)(q-1)$ *таких, что* $ed \equiv 1 \pmod{p-1}$ *и* $ed \equiv 1 \pmod{q-1}$. *Тогда для любого* $x \in \mathbb{Z}_n$ *верно* $x^{ed} \equiv x \pmod{N}$.

Доказательство.

$\varphi(N) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1)$.
По китайской теореме об остатках отображение
$\mathbb{Z}_n \to \psi(x) = (x_p, x_q), p \in \mathbb{Z}_p, q \in \mathbb{Z}_q$ изоморфно.
Поэтому $\psi(x^{ed}) = (x_1^{ed}, x_2^{ed})$. Так как $ed = 1 + k(p-1)$, то
$x_1^{ed} = x_1^{1+k(p-1)} = x_1 \cdot x_1^{k(p-1)} = x_1(x_1^{p-1})^k = x_1$ в $\mathbb{Z}_p$. Аналогично для x_2. □

Проверка числа на простоту

Вероятностный тест Миллера-Рабина

Definition (Псевдопростое число)

Натуральное число n — псевдопростое по основанию $a \in \mathbb{Z}_n^+$, если

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}. \tag{1}$$

- Если для какого-то основания a не выполнено (1), то n — составное.
- Существуют такие составные n (числа Кармайкла), что для любых a выполняется (1). Их 225 среди первых 100'000'000 чисел.
- Косвенное подтверждение простоты n — выполнение для любого $a \in \mathbb{Z}_n^+$ сравнений:

$$a^u \equiv 1 \pmod{n}, a^{2^r} u \equiv -1 \pmod{n}, 0 \leqslant r < s, \tag{2}$$

  где s — максимальная степень 2, делящая $n-1$.
- Тест Миллера-Рабина проверяет (1) и (2) для случайных $a \in \mathbb{Z}_n^+$.

Алгоритм Миллера-Рабина простоты n по основанию a

1. Тривиально: n — чётное — не простое. Конец.
2. Если $\gcd(a, n) \neq 1$ — не простое. Конец.
3. $b = a^n$. Если $b \equiv 1 \pmod{n} \vee b \equiv -1 \pmod{n})$ — возможно, простое. Конец.
4. Вычисляем по модулю n $b^2, b^4, \ldots, b^{2^s}$. Если хотя бы одно значение равно -1, то, возможно, простое. Иначе — точно не простое.

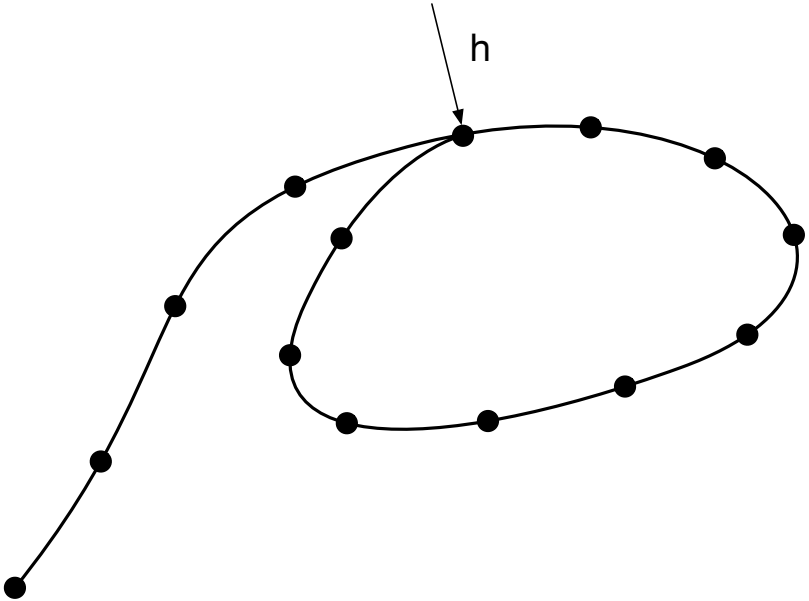
Алгоритм выполняется для случайных чисел a несколько раз. Вероятность каждого испытания — $\frac{1}{2}$.

Факторизация

Алгоритм ρ-Полларда

- Пусть имеется функция f, отображающая множество $\mathbb{Z}_n$ на множество $\mathbb{Z}_n$.
- Построим последовательность $\{x_i\} : x_i \in \mathbb{Z}_n, x_{i+1} = f(x_i)$.
- Для каких-то $h > 0, k > 0$ числа $x_1, x_2, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_{h+k-1}$ будут различны (их конечное количество), а $x_{h+k} = x_h$.
- Последовательность $\{x_i\}$ станет периодической с периодом k, начиная с $i = h$. h — *предпериод*.

ρ для последовательностей



Алгоритм $\rho-$Полларда

.

- Среднее числа итераций в $\mathbb{Z}_n$ до появления повторений оценивается как $O(\sqrt{n})$.
- Если m — делитель n, то можно построить последовательность из остатков по модулю m.
- Среднее число членов x до повторения будет m.
- Для какого-то r порядка $\sqrt{m}$ $x'_r = x'_s$.
- Но $x_s - x_r \vdots m$.
- Так как $n \vdots m$, то $n \vdots d = \gcd(|x_s - x_r|, n)$.
- Если $d \neq n$, нетривиальный делитель n найден.
- Сложность порядка $O(N^{\frac{1}{4}})$.
- В качестве $f(x)$ выбирается $x^2 + a, a \neq 0 \vee 2$.