Разработка и анализ алгоритмов

Лекция 3
Сортировка.

Сергей Леонидович Бабичев

Задача сортировки

Задача сортировки

Имеется последовательность из n *ключей*.

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

Требуется: упорядочить ключи по *не убыванию* или *не возрастанию*.
Это означает: найти перестановку ключей

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

такую, что

$$k_{p_1} \leqslant k_{p_2} \leqslant \cdots \leqslant k_{p_n}$$

или

$$k_{p_1} \geqslant k_{p_2} \geqslant \cdots \geqslant k_{p_n}$$

Задача сортировки

Элементами сортируемой последовательности могут иметь любые типы данных. Обязательное условие — наличие *ключа*.

Последовательность:
`(Москва, 10000000), (Нью-Йорк, 12000000), (Париж, 9000000), (Токио, 20000000), (Лондон, 10000000), (Дели, 9000000)`

Ключ — число жителей

Устойчивость сортировки

Алгоритм сортировки *устойчивый*, если он сохраняет относительный порядок элементов.

Начальная последовательность:
`(Москва, 10000000), (Нью-Йорк, 12000000), (Париж, 9000000), (Токио, 20000000), (Лондон, 10000000), (Дели, 9000000)`

Устойчивая сортировка:
`(Токио, 20000000), (Нью-Йорк, 12000000), (Москва, 10000000), (Лондон, 10000000), (Париж, 9000000), (Дели, 9000000)`

Неустойчивая сортировка:
`(Токио, 20000000), (Нью-Йорк, 12000000), (Лондон, 10000000), (Москва, 10000000), (Париж, 9000000), (Дели, 9000000)`

Сортировки сравнением.

Сортировка сравнением

Один из видов сортировки: *сортировка сравнением*.

Требования к алгоритму: **для ключей должна существовать операция сравнения**

$$a < b$$

Полагается, что

$$\overline{(a < b)} \wedge \overline{(b < a)} \to a = b$$

Это необходимое условие для соблюдения *закона трихотомии*: для любых a, b либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$.

Сортировка в языке Си

- Требуется функция сравнения элементов.
- `int cmp(void const *el1, void const *el2);`
- Должна возвращать 0, если элементы равны, что-то отрицательное, если первый меньше и что-то положительное, если первый больше.

```
int cmp_int(const void *el1, const void *el2) {
  return *(const int *)el1 - *(const int *)el2;
}
```

Сортировка в языке Си

```
#include <stdlib.h>

...
int a[100];
...
qsort(a, 100, sizeof a[0], cmp_int);
// Here a is sorted in ascending order
```

Понятие *инверсии*

Определение: *Инверсия* — пара ключей с нарушенным порядком следования.

$$\{4, 15, 6, 99, 3, 15, 1, 8\}$$

- Имеются следующие инверсии:
  `(4,3)`, `(4,1)`, `(15,6)`, `(15,3)`, `(15,1)`, `(15,8)`, `(6,3)`, `(6,1)`, `(99,3)`, `(99,15)`, `(99,1)`, `(99,8)`, `(3,1)`, `(15,1)`, `(15,8)`
- Перестановка соседних элементов, расположенных в ненадлежащем порядке, уменьшает количество инверсий ровно на 1.
- Количество инверсий в любом множестве конечно, в отсортированном — равно нулю.
- Количество обменов для сортировки конечно и не превосходит числа инверсий.

Сортировка пузырьком

Один из простейших в реализации алгоритмов.

Основная идея: до тех пор, пока соседние элементы не в порядке, меняем их местами.

$$\{\underbrace{10, 4}, 14, 25, 77, 2\}$$
$$\{4, \underbrace{10, 14}, 25, 77, 2\}$$
$$\{4, 10, \underbrace{14, 25}, 77, 2\}$$
$$\{4, 10, 14, \underbrace{25, 77}, 2\}$$
$$\{4, 10, 14, 25, \underbrace{77, 2}\}$$
$$\{4, 10, 14, 25, 2, 77\}$$

Сортировка пузырьком: сложность алгоритма

Лучший случай: { 1, 2, 3, 4, 5, 6} — $O(N)$.

Худший случай: { 6, 5, 4, 3, 2, 1} — $O(N^2)$.

Средний случай: $O(N^2)$

Сортировка пузырьком

```
void bubblesort(int a[], int n) {
   bool sorted = false;
   while (!sorted) {
      sorted = true;
      for (int i = 0; i < n-1; i++) {
        if (a[i] > a[i+1]) {
           std::swap(a[i],a[i+1]);  // C++!
           sorted = false;
        }
      }
      n--;
    }
}
```

Сортировка пузырьком: инвариант

Инвариант: после i-го прохода на верных местах находится не менее i элементов «справа»

$$\{\boxed{5,3}, 15, 7, 6, 2, 11, 13\}$$

$$\{3, \boxed{5,15}, 7, 6, 2, 11, 13\}$$

$$\{3, 5, \boxed{15,7}, 6, 2, 11, 13\}$$

$$\{3, 5, 7, \boxed{15,6}, 2, 11, 13\}$$

$$\{3, 5, 7, 6, \boxed{15,2}, 11, 13\}$$

$$\{3, 5, 7, 6, 2, \boxed{15,11}, 13\}$$

$$\{3, 5, 7, 6, 2, 11, \boxed{15,13}\}$$

$$\{3, 5, 7, 6, 2, 11, 13, \underline{15}\}$$

$$\{3, 5, 6, 2, 7, 11, \underline{13, 15}\}$$

$$\{3, 5, 2, 6, 7, \underline{11, 13, 15}\}$$

$$\{3, 2, 5, 6, \underline{7, 11, 13, 15}\}$$

$$\{2, 3, 5, \underline{6, 7, 11, 13, 15}\}$$

Сортировка пузырьком: особенности

- Крайне проста в реализации и понимании.
- Устойчива.
- Сложность в наилучшем случае $O(N)$.
- Сложность в наихудшем случае $O(N^2)$.
- Сортирует на месте.

Сортировка вставками

- Первый проход — нужно поместить самый лёгкий элемент на первую позицию.
- В i-м проходе ищется, куда поместить очередной a_i внутри левых i элементов.
- Элемент a_i помещается на место, сдвигая вправо остальные внутри области $0 \dots i$.

Инвариант: после i-го прохода обеспечена упорядоченность левых i элементов.

Сортировка вставками

Инвариант сортировки вставками:

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}}, a_i, \ldots, a_n$$
$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{i-1}$$

На шаге i имеется упорядоченный подмассив $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ и элемент a_i, который надо вставить в подмассив без потери упорядоченности.

Сортировка вставками

```
void sort_insertion(int *a, int n) {
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int j = i;
        int tmp = a[i];
        while (j >= 1 && tmp < a[j-1]) {
            a[j] = a[j-1];
            j--;
        }
        a[j] = tmp;
    }
}
```

Сортировка вставками

Определение сложности.

- **Худший случай** — упорядоченный по убыванию массив. Тогда цикл вставки всегда будет доходить до 1-го элемента.
- Для вставки элемента a_i потребуется $i - 1$ итерация.
- Позиции ищутся для $N - 1$ элемента. Общее время

$$T(N) = \sum_{i=2}^{N} c(i-1) = \frac{cN(N-1)}{2} = O(N^2).$$

- **Лучший случай** — упорядоченный по возрастанию массив. $T(N) = O(N)$

Сортировка вставками: особенности

- Сортировка упорядоченного массива требует $O(N)$.
- Сложность в худшем случае $O(N^2)$.
- Алгоритм устойчив.
- Число дополнительных переменных не зависит от размера (*in-place*).
- Позволяет упорядочивать массив при динамическом добавлении новых элементов — *online*-алгоритм.

Сортировки Шелла и comb

Помним, что один шаг сортировки пузырьком уменьшает инверсию на 1.

$$I(\{8,7,6,5,4,3,2,1\}) = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Может быть стоит обменивать элементы с расстоянием $d > 1$?
Пусть $d = 4$.

$$I(\{4,7,6,5,8,3,2,1\} = 21$$

За один шаг инверсия уменьшилась на 7.

$$\{8,7,6,5,4,3,2,1\}$$
$$\{4,7,6,5,8,3,2,1\}$$
$$\{4,3,6,5,8,7,2,1\}$$
$$\{4,3,2,5,8,7,6,1\}$$
$$\{4,3,2,1,8,7,6,5\}$$

Сортировки Шелла и comb

Второй проход: $d = 2$

$$\{4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5\}$$
$$\{2, 3, 4, 1, 8, 7, 6, 5\}$$
$$\{2, 1, 4, 3, 8, 7, 6, 5\}$$
$$\{2, 1, 4, 3, 6, 7, 8, 5\}$$
$$\{2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7\}$$

Сортировки Шелла и comb

Третий проход: $d = 1$

$$\{2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7\}$$
$$\{1, 2, 4, 3, 6, 5, 8, 7\}$$
$$\{1, 2, 3, 4, 6, 5, 8, 7\}$$
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7\}$$
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Сортировка comb

```
void combsort(int *a, int n) {
  double s = n - 1;
  while (s >= 1) {
    int d = s;
    for (int i = d; i < n; i++) {
      if (a[i-d] > a[i]) {
        swap(&a[i-d], &a[i]);
      }
    }
    s /= 1.24733;
  }
}
```

Сортировка Шелла

```
void sort_insertion(int *a, int n) {
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int j = i;
        int t = a[i];
        while (j >= 1 && t < a[j-1]) {
            a[j] = a[j-1];
            j--;
        }
        a[j] = t;
    }
}
```

```
void sort_shell(int  *a, int n) {
   int h;
   for (h = 1; h <= n / 9; h = 3*h + 1)
      ;
   for ( ; h > 0; h /= 3) {
      for (int i = h; i < n; i++) {
        int j = i;
        int t = a[i];
        while (j >= h && t < a[j-h]) {
          a[j] = a[j-h];
          j -= h;
        }
        a[j] = t;
      }
   }
}
```

Сортировка Шелла

Для массива размером $N = 100$ последовательность $d = \{1, 4, 13, 40\}_{inv}$

Сложность зависит от последовательности d.

Для оригинальной последовательности худшая $= O(N^2)$

Для $d = \{1, 4, 13, \dots\}$ худшая $= O(N^{\frac{3}{2}})$

Для $d = \{1, 8, 23, 77, \dots, 4^{i+1} + 3 \cdot 2^i + 1, \dots\}$ худшая $= O(N^{\frac{4}{3}})$

Сортировки Шелла и comb

Особенности:

- Сортировка упорядоченного массива требует $O(N)$.
- Алгоритм неустойчив.
- Число дополнительных переменных не зависит от размера (*in-place*).
- Конкуренты популярным алгоритмам при не очень больших N.
- Низкий коэффициент амортизации.

Сортировка выбором

- Шаги нумеруем с нуля.
- В $i-$м шаге рассматривается область от i до $n-1$
- В области находится минимальный элемент на позиции j
- Элементы a_i и a_j меняются местами.

Инвариант: после i итераций упорядочены первые i элементов.

Сортировка выбором

$$
\begin{aligned}
\{ \quad & 5, 3, 15, 7, 6, \boxed{2}, 11, 13\} \\
\{ \quad & \underline{2}, \boxed{3}, 15, 7, 6, 5, 11, 13\} \\
\{ \quad & \underline{2, 3}, 15, 7, 6, \boxed{5}, 11, 13\} \\
\{ \quad & \underline{2, 3, 5}, 7, \boxed{6}, 15, 11, 13\} \\
\{ \quad & \underline{2, 3, 5, 6}, \boxed{7}, 15, 11, 13\} \\
\{ \quad & \underline{2, 3, 5, 6, 7}, 15, \boxed{11}, 13\} \\
\{ \quad & \underline{2, 3, 5, 6, 7, 11}, 15, \boxed{13}\} \\
\{ \quad & \underline{2, 3, 5, 6, 7, 11, 13}, \boxed{15}\} \\
\{ \quad & \underline{2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 15}\}
\end{aligned}
$$

Сортировка выбором: особенности

- Во всех случаях сложность $O(N^2)$!
- Алгоритм устойчив.
- *in-place*.
- Количество операций обмена $O(N)$ — может пригодиться для сортировок массивов с большими элементами.

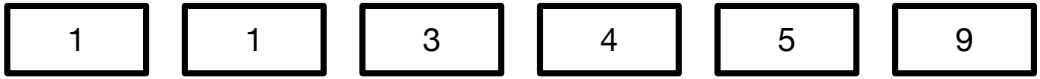
Сортировка слиянием

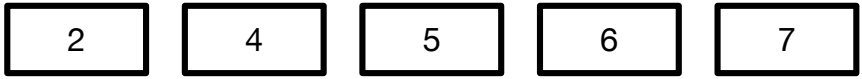
Сортировка слиянием

- *Слияние* — объединение отсортированных массивов.
- Сложность операции слияния — $\Theta(N_1 + N_2)$.
- *Двухпутевое* слияние — объединение *двух* отсортированных массивов.
- *Декомпозиция* — разделение массива на подмассивы.

Быстрые сортировки

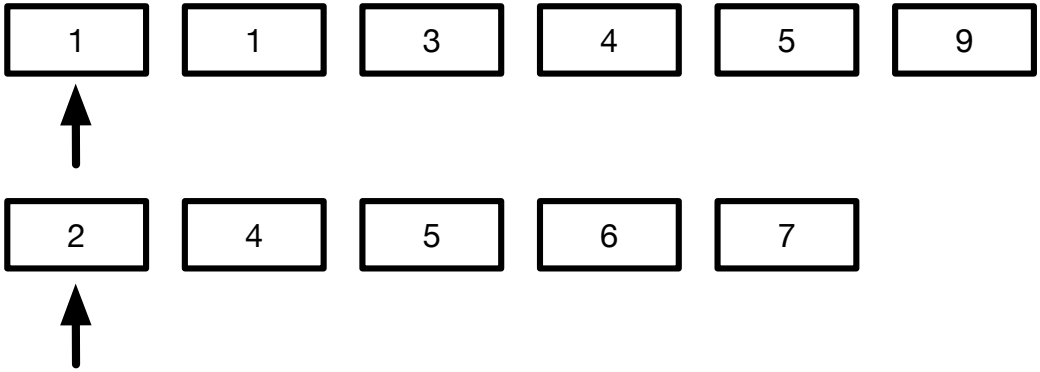
- Квадратичные устойчивые сортировки слишком медленны для того, чтобы сортировать большие последовательности.
- Сортировки Шелла и `comb` — неустойчивы.
- Рекурсия?
- Мечта: а что, если бы мы имели два отсортированных массива, за какое время можно получить отсортированный массив, содержащий элементы обоих массивов?





Слияние массивов

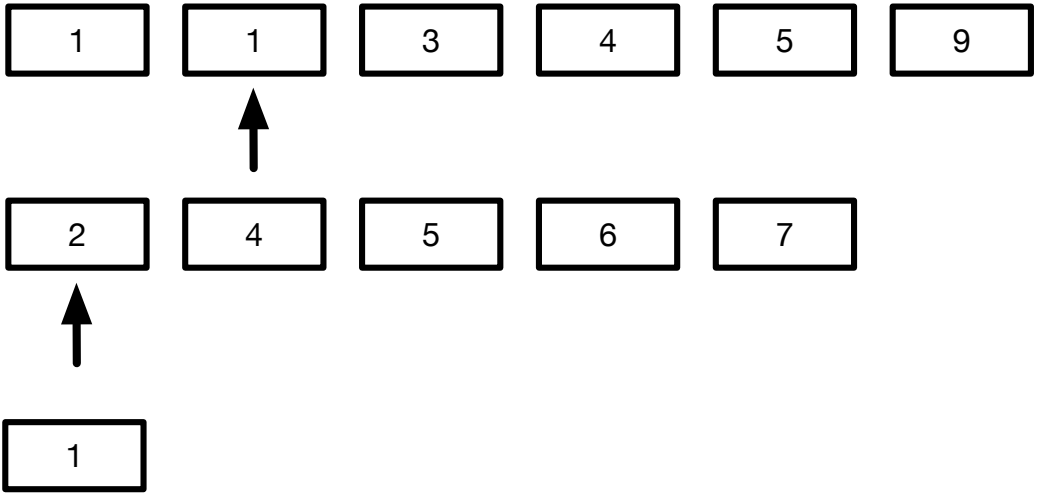
- Сложность операции *слияния* есть $\Theta(N_1 + N_2)$.
- Алгоритм — два указателя.
- Установим их на начала массивов.



- Сравним значения по этим указателям.

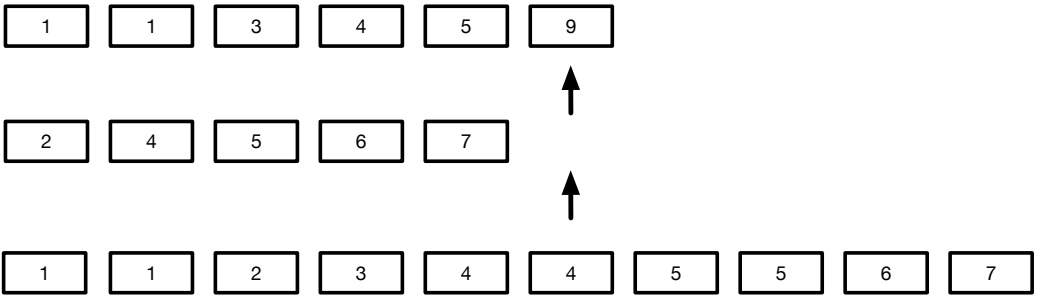
Слияние массивов

- Меньшее значение отправляем в массив-приёмник и передвигаем соответствующий указатель.



Слияние массивов

- Повторяем так до тех пор, пока один из указателей не выйдет за границы одного из массивов:



- И копируем остаток второго в выходной.

Слияние массивов

- А теперь — *разделяй и властвуй*.
- Предположим, имелся массив размером 1000 элементов.
- Операция сортировки вставками потребовала бы примерно 1000000 операций.
- Если бы мы разбили массив на два по 500 и отсортировали бы каждый, общее количество операций было бы примерно $2 \cdot 500 \cdot 500 = 500000$.
- Слияние добавило бы ещё 1000 операций. Итого — 501000 операция вместо 1000000.
- Всё же рекурсия.

Сортировка слиянием

Массив $S = \{10, 5, 14, 7, 3, 2, 18, 4, 5, 13, 6, 8\}$

Декомпозиция 1: Массивы $S_l = \{10, 5, 14, 7, 3, 2\}$ и $S_r = \{18, 4, 5, 13, 6, 8\}$
(Рекурсивно) Сортировка S_l : $S_l = \{2, 3, 5, 7, 10, 14\}$
(Рекурсивно) Сортировка S_r : $S_r = \{4, 5, 6, 8, 13, 18\}$
Слияние 1: $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 18\}$

Сортировка слиянием

Псевдокод для алгоритма.

```
void mergeSort(int a[], int low, int high) {
   if (high - low < THRESHOLD) {
      plainSort(a, low, high);
   } else {
      int mid = (low + high) / 2;
      mergeSort(a, low, mid);
      mergeSort(a, mid+1, high);
      merge(a, low, mid ,high);
  }
}
```

Сложность сортировки слиянием

Принцип *разделяй и властвуй* — мастер-теорема в действии.

$$T(N) = T\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right) + \Theta(N)$$

- Количество подзадач $a = 2$
- Уменьшение подзадачи $b = 2$
- Коэффициент $d = 1$.
  $\log_b a = \log_2 2 = 1 \to T(N) = \Theta(N \log N)$.

Сортировка слиянием: особенности

- Требует добавочно $\Theta(N)$ памяти.
- Сложность не зависит от входа и равна всегда $\Theta(N \log N)$.
- Устойчива!
- Прекрасно подходит для *внешней* сортировки.
- Прекрасно подходит для *параллельной* сортировки.

Нахождение порядковой статистики

Нахождение порядковой статистики массива

Определение. $k-$й порядковой статистикой массива называется $k-$й по величине элемент массива.

- Максимальный(минимальный) элемент массива — 1-я (N-я) порядковая статистика;
- медиана — элемент, который находился бы в середине упорядоченного массива.
  Median($\{1, 1, 1, 1, 1, 10\}$) = 1.0
  Average($\{1, 1, 1, 1, 1, 10\}$) = 2.5

Нахождение $k-$й порядковой статистики

Легко ли найти $i-$ю порядковую статистику?

`i=1` Нахождение максимума — очевидно, что сложность $O(N)$.

`i=2` Нахождение второго по величине элемента. Простой способ: хранить значения двух элементов, максимального и второго по величине. **Два** сравнения на каждой итерации. $O(2N)$

`i=3` Нахождение третьего по величине элемента. Простой способ: хранить значения трёх элементов, максимального, второго по величине, третьего по величине. **Три** сравнения на каждой итерации. $O(3N)$

`i=k` Требуется ли использовать $O(k)$ памяти и тратить $O(kN)$ операций на одну итерацию?

Нахождение $k-$й порядковой статистики

Алгоритм нахождения $k-$й порядковой статистики методом *разделяй и властвуй*:

1. Выбираем случайным образом элемент v массива S
2. Разобьём массив на три подмассива S_l, элементы которого меньше, чем v; S_v, элементы которого равны v и S_r, элементы которого больше, чем v.
3.

$$selection(S,k) = \begin{cases} selection(S_l,k), & \text{если } k \leqslant |S_l| \\ v, & \text{если } |S_l| < k \leqslant |S_l| + |S_v| \\ selection(S_r, k - |S_l| - |S_v|), & \text{если } k > |S_l| + |S_v| \end{cases}$$

Пример: Нахождение $k-$статистики.

- Массив $S = \{10, 6, 14, 7, 3, 2, 18, 4, 5, 13, 6, 8\}$
  Надо найти $k = 6$ статистику.
  Первый проход: выбран произвольный элемент 8.

$$S_l = \{6, 7, 3, 2, 4, 5, 6\} \quad |S_l| = 7$$
$$S_v = \{8\} \quad |S_v| = 1$$
$$S_r = \{10, 14, 18, 13\} \quad |S_r| = 4$$

  $k < |S_l| \rightarrow$ первый случай.

Пример: Нахождение $k-$статистики.

Второй проход: $S = \{6, 7, 3, 2, 4, 5, 6\}$

Выбран произвольный элемент 5.

$$\begin{aligned} S_l &= \{3, 2, 4\} & |S_l| &= 3 \\ S_v &= \{5\} & |S_v| &= 1 \\ S_r &= \{6, 7, 6\} & |S_r| &= 3 \end{aligned}$$

$k > |S_l| + |S_v| \rightarrow$ третий случай.

Пример: Нахождение $k-$статистики.

Третий проход: $S = \{6, 7, 6\}$

Выбран произвольный элемент 6.

$$\begin{aligned} S_l = \{\} \quad & |S_l| = 0 \\ S_v = \{6, 6\} \quad & |S_v| = 2 \\ S_r = \{7\} \quad & |S_r| = 1 \end{aligned}$$

$|S_l| < k \leqslant |S_l| + |S_v| \rightarrow$ второй случай.
Ответ: 6

Нахождение $k-$статистики. Сложность

Алгоритм типа *разделяй и властвуй* $\rightarrow$ работает мастер-теорема.

Идеальный случай — уменьшение в 2 раза.

Тогда

$$T(N) = T\left(\frac{N}{2}\right) + O(N)$$

- Количество подзадач $a = 1$
- Уменьшение размер подзадачи $b = 2$
- Коэффициент $d = 1$.

$\log_b a = \log_2 1 = 0 < 1 \rightarrow T(N) = O(N)$.

Нахождение $k-$статистики. Сложность

Худший случай: при выборе каждый раз $|S_l| = 0$ или $|S_r| = 0$

$$T(N) = N + (N-1) + \cdots = \Theta(N^2)$$

Вероятность такого события $p = \prod\limits_{i=N,2} \frac{2}{i}$.

Пусть *хороший элемент* — такой, что его порядковый номер L в отсортированном массиве

$$\frac{1}{4}|S| \leqslant L \leqslant \frac{3}{4}|S|$$

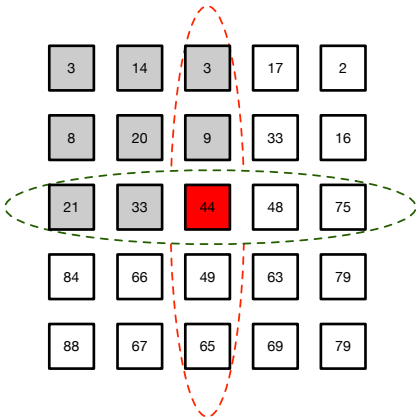
Вероятность p случайного элемента оказаться *хорошим* $p = \frac{1}{2}$.
Математическое ожидание количества испытаний для выпадения *хорошего* элемента $E = 2$.
Следовательно

$$T(N) \leqslant T\left(\frac{3}{4}N\right) + O(N) \to O(N)$$

Детерминированное нахождение *хорошего* элемента

- Медиану можно искать как $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$-ю порядковую статистику.
- Как обеспечить сложность $O(n)$ в *худшем* случае?
- Рассмотрим следующий алгоритм:
  1. Разобьём массив на подмассивы по 5 элементов.
  2. Найдём медиану каждого подмассива и сформируем из них новый массив размером $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$
  3. Будем повторять алгоритм, начиная с (1) до тех пор, пока в массиве не останется один элемент. Этот элемент и будет искомым ведущим элементом.

Оценка качества поиска *хорошего* элемента



- Нужно найти нижнюю границу числа элементов, превышающих *хороший*.
- По вертикали — пятёрки, получившиеся на предыдущей итерации.
- Все элементы левее и/или выше медианы медиан не превосходят её.
- Минимум половина медиан пятёрок больше или равна *хорошему* элементу.
- Минимум $\lceil N/5 \rceil$ содержат по три элемента не меньше *хорошего*.
- Добавим одну группу с количеством элементов, меньших пяти и группу с *хорошим* элементом.
- Общее количество убираемых не менее

$$3\left(\left\lceil\frac{1}{2}\left\lceil\frac{N}{5}\right\rceil\right\rceil-2\right)\geqslant\frac{3N}{10}-6.$$

Сложность алгоритма $Selection$ для выбора пятёрками.

Общее время на рекурсивном вызове складывается из:

- Разбиение элементов $O(N)$.
- Рекурсивно: одна задача сложностью $\frac{7}{10}$.
- Задача вычисления медианы медиан сложностью $\frac{1}{5}$.

$$T(N) = T\left(\frac{1}{5}N\right) + T\left(\frac{7}{10}N\right) + O(N) \to T(N)$$

Быстрая сортировка

Быстрая сортировка

Алгоритм почти повторяет алгоритм поиска медианы.

1. Из элементов **выбирается *ведущий*** (*pivot*). Чем он ближе, к медиане, тем лучше!
2. **Массив разбивается на два**. Левая часть — элементы не больше ведущего, правая часть — элементы, не меньше ведущего.
3. **Рекурсивно** повторяются шаги 1 и 2 для обоих частей.

Левая и правая части остаются внутри массива!

Быстрая сортировка

Массив $S = \{10, 5, 14, 7, 3, 2, 18, 4, 5, 13, 6, 8\}$

- Разделение 1. Пусть ведущий элемент = 8.

$$S_{1l} = \{5, 7, 3, 2, 4, 5, 6, 8\}, S_{1r} = \{10, 14, 18, 13\}$$

$$S_1 = \{\underbrace{5, 7, 3, 2, 4, 5, 6, 8}, \underbrace{10, 14, 18, 13}\}$$

- Рекурсивное разделение 2. Пусть ведущий элемент = 5
  $S_1 = \{5, 7, 3, 2, 4, 5, 6, 8\}$

$$S_{2l} = \{5, 3, 2, 4, 5\}, S_{2r} = \{7, 6, 8\}$$

$$S_2 = \{\underbrace{5, 3, 2, 4, 5}, \underbrace{7, 6, 8}\}$$

Быстрая сортировка

Рассуждения заставляют вспомнить поиск $k-$й статистики и сортировку слиянием.
Лучший случай: выбирается медианный элемент.

$$T(N) = T\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right) + \Theta(N)$$

- Количество подзадач $a = 2$
- Размер подзадачи $b = 2$
- Коэффициент $d = 1$.
  $\log_b a = \log_2 2 = 1 \to T(N) = O(N \log N)$.

Быстрая сортировка

- Худший случай: ведущим выбирается минимальный или максимальный элемент.
- Вероятность такого события при условии случайного выбора равна

$$p = \frac{2}{N} \cdot \frac{2}{N-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^{N-1}}{N!}$$

- При $N = 10$ $p = 1.4 \times 10^{-4}$, при $N = 20$ $p = 1.1 \times 10^{-13}$
- Один из способов: ведущий элемент есть медиана из трёх случайных элементов массива.

Быстрая сортировка: особенности

- Может проводиться на месте.
- Сложность в наихудшем случае $O(N^2)$, но с крайне малой вероятностью.
- Сложность в среднем $O(N \log N)$.
- В прямолинейной реализации использует до $O(N)$ стека.

Задача разбиения массива по ведущему элементу.

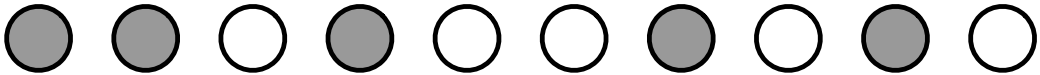
- Очевидно решение с использованием добавочной памяти.
- Наша цель — разбиение на месте.

Задача о бармене

Задача. На столе в ряд стоят N непрозрачных стаканов, закрытых крышками. В части из них налито молоко, в части — квас.

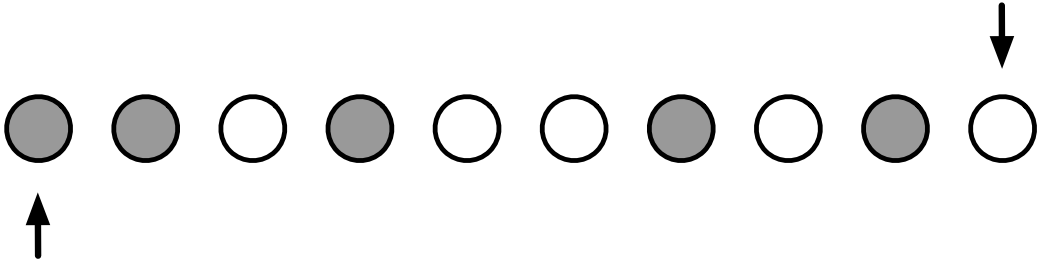
За одну операцию бармен может либо открыть крышку и посмотреть цвет напитка, либо переставить любые два стакана местами.

Память у бармена неважная, он может запомнить два-три факта. Помогите ему расставить стаканы так, чтобы слева стояли все стаканы с молоком, а за ним — все стаканы с квасом.

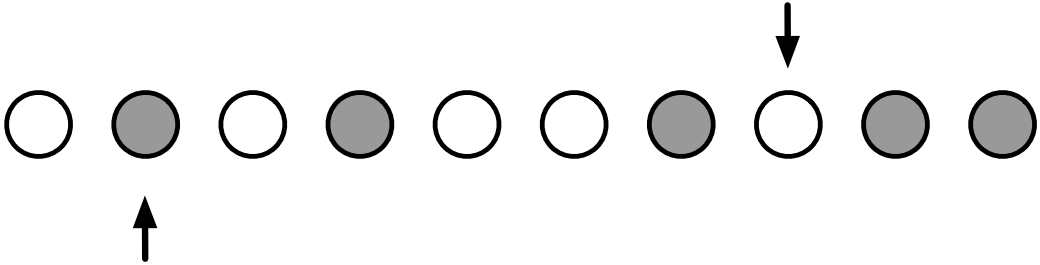


Решение задачи о бармене

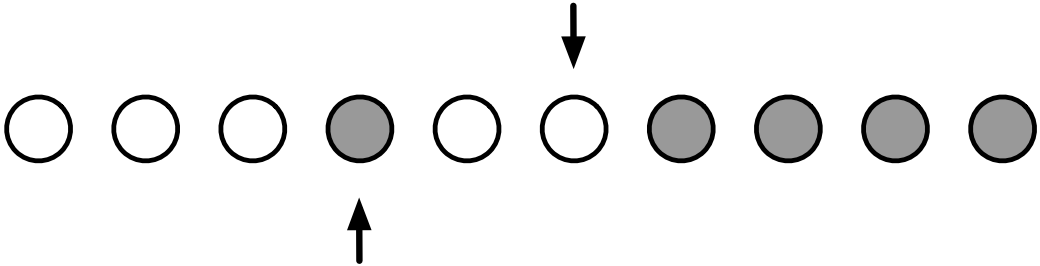
- Хотя память у бармена неглубокая, он способен запомнить положение двух стаканов.
- Сначала он идёт слева и находит первый стакан с квасом и запоминает его позицию.
- Затем он идёт справа и запоминает первый стакан с молоком.



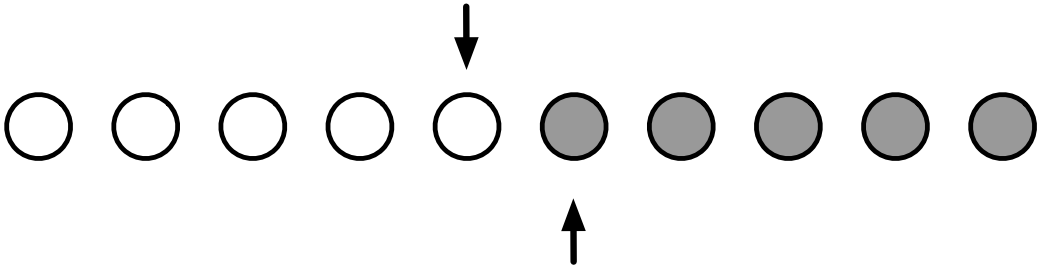
- Он меняет стаканы местами и повторяет операцию ищет стаканы: слева с квасом, справа — с молоком.



- После очередного обмена:



- После очередного обмена указатель на молоко «забежал» за указатель на кофе — работа закончена.



- Даже не понадобилось считать, сколько стаканов какого цвета.

Алгоритм Hoar_partition

- Решение задачи о бармене дало нам быстрый алгоритм «расслоения» массива на две области.
- Стаканы с молоком — элементы, меньшие *ведущего* элемента, с квасом — не меньшие.
- Этот алгоритм — алгоритм разбиения (`partition`) Хоара.
- Наличие *далёких* обменов приводит к неустойчивой сортировке.

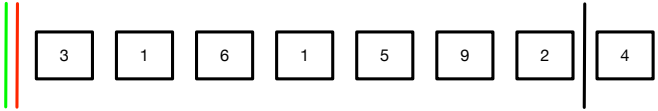
Алгоритм Lomuto_partition

- Алгоритм Хоара — вариация алгоритма двух указателей.
- Она требует возможности прохода по массиву в двух направлениях.
- Алгоритм Ломуто допускает движение строго в одном направление, и тоже двумя указателями.
- В качестве ведущего элемента рассматривается последний элемент массива.
- При исполнении алгоритм формирует несколько непересекающихся множеств:
  1. множество x элементов, не больших ведущего, уже находящихся на своих местах;
  2. множество y элементов, больших ведущего;
  3. множество z ещё не обработанных элементов;
  4. сам ведущий элемент, множество p.
  5. Ведутся указатели на начало каждого множества.
  6. Элементы меняются местами (`swap`).

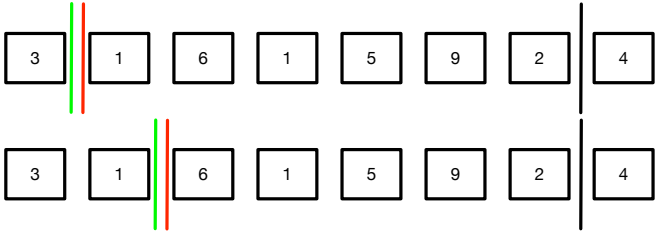
Алгоритм Lomuto_partition

- Рассмотрим на примере массива $3, 1, 6, 1, 6, 9, 2, 4$.

Зелёный цвет — граница между x и y, красный цвет — граница между y и z, чёрный цвет — граница между z и p. Значение ведущего элемента — $pivot$.

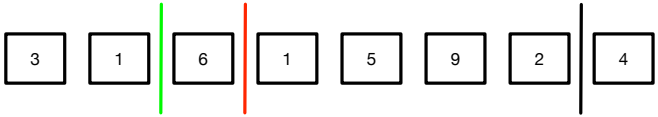


- Берём элемент a_i. Если a_i меньше $pivot$, то множество x увеличивается на этот элемент, множество z уменьшается.

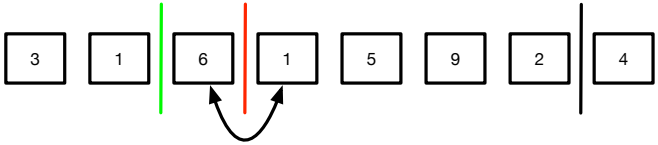


Алгоритм Lomuto_partition

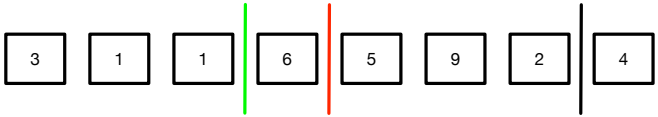
- Если элемент a_i больше $pivot$, он должен направиться в множество y.



- Сейчас элемент a_i меньше $pivot$. Его надо отправить в конец множества x. А куда девать элемент множества y, который там сейчас находится? Поменять их местами.

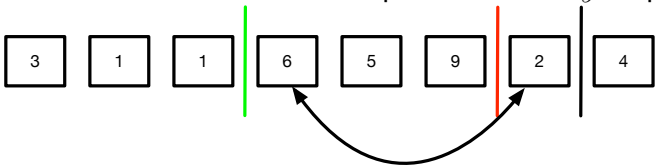


- Тогда у множества y первый элемент будет перенесён на новое место и его размер не изменится. Множество x расширится на один элемент.

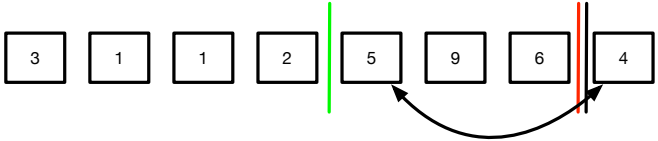


Алгоритм Lomuto_partition

- Расширим множество y на элементы 5 и 9. При добавлении элемента 2 поменяем местами его и первый элемент y, перенеся границу y на 1.



- Последний элемент обрабатывается по тому же алгоритму и меняется с первым элементом множества y.



- Алгоритм закончен. Возвращаем место, где оказался ведущий элемент.