

# 11 Сложность

**Задача 11.1.** Докажите, что для константы  $c > 0$  и  $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$  результат  $\Omega(n \log n)$ .

**Задача 11.2.** Верно ли утверждение?

1.  $2^{n+5} = \Theta(2^n)$ ;
2.  $2^n = \Theta(2^{n/2})$ ;
3.  $n^2 = O(2^n)$ ;
4.  $\frac{n}{\log n} = \Omega(\log n)$ ;
5.  $\frac{n}{\log n} = \Omega(n/2)$ ;
6.  $\sqrt{n}^{\sqrt{n}} = O((\log n)^n)$ ;
7.  $n^{\log n} = O(1.01^n)$ ;
8.  $n^n = O(n!)$ .

**Задача 11.3.** Найдите решение через  $\Theta$

1.  $T(n) = 5T(n/5) + n$ ;
2.  $T(n) = 10T(n/6) + n$ ;
3.  $T(n) = 16T(n/4) + n^2$ ;
4.  $T(n) = 10T(n/6) + n^3$
5.  $T(n) = T(\sqrt{n}) + 2$ ;
6.  $T(n) = T(n/2) + 15$ ;
7.  $T(n) = 2T(n-1) + 1$ ;
8.  $T(n) = T(n-1) + c^n$ , где  $c > 1$ ;
9.  $T(n) = T(n-1) + 2$ ;
10.  $T(n) = 100T(n/49) + n^{3/2} \log n$
11.  $T(n) = T(n-1) + c^n$ , где  $c \geq 1$ ;

**Задача 11.4.** Известно, что  $f(n) = \alpha(u(n))$ , а  $g(n) = \beta(v(n))$  и  $\alpha, \beta$  — что-то из символов  $\Theta, O, \Omega$ .

Каким символом может быть  $\gamma$  в выражении  $f(n) \cdot g(n) = \gamma(u(n) \cdot v(n))$ ?

**Задача 11.5.** Расставьте функции в порядке возрастания:

1.  $\frac{1}{n^{\log n}}$ ;

2.  $\frac{1}{n^n}$ ;

3.  $\frac{1}{\log \log n}$ ;

4.  $\frac{1}{\log n}$ ;

5.  $\frac{1}{c^{c^n}}$ ;

6.  $\frac{1}{n^\varepsilon}$ ;

7.  $\frac{1}{n^n}$ ;

**Задача 11.6.** Оцените сложность

$$Y = \lfloor N/Z \rfloor + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{5}{2}Z - 3,$$

где  $Z = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor$ .

Вынесите часть, не имеющую символов сложности отдельно.

**Задача 11.7.** Пусть  $f(n) = O(g(n))$ . Верно ли, что  $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ ?

**Задача 11.8.** Пусть  $g(n) = \Omega(g(n))$ . Верно ли, что  $2^{f(n)} = \Omega(2^{g(n)})$ ?

**Задача 11.9.** Найти верхние и нижние асимптотические оценки (настолько хорошие, насколько сможете):

1.  $T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

2.  $T(n) = 9T\left(\frac{n}{2}\right) + n^{2-\sin n}$

3.  $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + 3 \log n$

4.  $T(n) = 9T\left(\frac{n}{2}\right) + n^{7-\sin n}$

5.  $T(n) = 10T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

6.  $T(n) = 15T\left(\frac{n}{2}\right) + n^{5-\cos n}$

7.  $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$

8.  $T(n) = 15T\left(\frac{n}{2}\right) + n^{2-\cos n}$

**Задача 11.10.**  $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ .

1. Оцените  $T(n)$ , при  $a < b$  и  $f(n) = \Theta(n)$ .
2. Оцените  $f(n)$ , при  $a > b$  и  $T(n) = \Theta(n \log n)$ .
3. Оцените  $T(n)$ , при  $a > b$  и  $f(n) = \Theta(n)$ .
4. Оцените  $f(n)$ , при  $a < b$  и  $T(n) = \Theta(n \log n)$ .

**Задача 11.11.** Случайное двоичное дерево поиска строится из последовательности следующим образом:

- Первый элемент последовательности есть корень дерева.
- Каждый элемент последовательности добавляется к дереву так, чтобы левый ребёнок и все элементы дерева, которые начинаются с этого узла, были не больше, чем родитель, а правый ребёнок со всеми элементами — строго больше родителя.
- В дереве ничего не уничтожается и элементы не меняются местами.
- Все последовательности из  $n!$  элементов имеют равную вероятность.

Определить сложность вставки  $N$ -го элемента в это дерево.