Математические основы информатики

Лекция 5.
Комбинаторика.

Сергей Леонидович Бабичев

Формула n^m и её применения

- Пусть X и Y — множества. $|X| = m$, $|Y| = n$. Тогда число произвольных отображений с областью определения X и множеством значений, содержащимся в Y, определяется формулой n^m.
- Пусть y — число различных ящиков, p — число различных предметов. Число произвольных способов разместить предметы по ящикам определяется формулой y^p.
- Пусть в алфавите $\{b_1, b_2, \ldots, b_a\}$ содержится a букв. Тогда число произвольных слов длины d определяется формулой a^d.

Формула n^m и её применения

- Пример: пусть алфавит $\{x, y, z\}$, содержит три буквы $(a = 3)$. Всевозможные слова длины два $(d = 2)$:

1	xx	4	xy	7	xz
2	yx	5	yy	8	yz
3	zx	6	zy	9	zz

- Всего слов $3^2 = 9$.
- Для слов длины 3 в том же алфавите, таблица была бы трёхмерной — $3 \times 3 \times 3$, искомое количество слов равно количеству ячеек в этой таблице — 27.

Формула $[n]_m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$ и её применения

- Пусть X и Y — множества. Мощность множества X равна m, $|X| = m$, а $|Y| = n$. Число инъективных отображений с областью определения X и множеством значений, содержащимся в Y, определяется формулой $[n]_m$.
- Пусть y — число различных ящиков, p — число различных предметов. Число способов разместить предметы по ящикам, при условии, что в каждом ящике содержится не более одного предмета, определяется формулой $[y]_p$.

Формула $[n]_m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$

Вот способы разместить два различных предмета $(p = 2)$ в трёх различных ящиках $(y = 3)$ при условии, что в каждом ящике не более одного предмета.

	1	2	3
1	1	2	
2	1		2
3		1	2
4	2	1	
5	2		1
6		2	1

- Всего размещений $[3]_2 = 3(3-1) = 6$.
- Для случая трёх предметов $(p = 3)$ и двух ящиков $(y = 2)$ нет ни одного размещения, при котором в каждом ящике не более одного предмета, $[2]_3 = 2(2-1)(2-2) = 0$.
- Пусть в алфавите $\{b_1, b_2, \ldots, b_a\}$ содержится a букв. Тогда число слов длины d без повторяющихся букв определяется формулой $[a]_d$.
  Пусть алфавит $\{x, y, z\}$, содержит три буквы $(a = 3)$.
- Вот всевозможные слова длины два $(d = 2)$, при условии, что буквы не повторяются:

1	xy	3	yz	5	zx
2	xz	4	yx	6	zy

  Всего слов $[3]_2 = 3(3-1) = 6$.

Число подмножеств n-элементного множества

Задача. Множество X содержит n элементов. Сколько существует различных подмножеств множества X?

Решение: Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Рассмотрим произвольное подмножество S множества X. Сопоставим слово $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ длины n в алфавите из двух букв $\{0, 1\}$ следующим образом:

$$i - \text{я буква слова, } \alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \notin S \\ 1, & \text{если } x_i \in S \end{cases}$$

Для каждого подмножества S может быть построено слово α.

$$S \to \alpha$$

По произвольному слову α длины n в алфавите $\{0, 1\}$ можно однозначно определить подмножество S, которому это слово было сопоставлено.

$$\alpha \to S$$

Соответствие биективно.

$$S \leftrightarrow \alpha$$

Число подмножеств множества X, содержащего n элементов, в точности равно числу слов длины n в алфавите из двух букв — булеан 2^n.

Последовательности подмножеств

Задача. Пусть множество X содержит n элементов. Рассмотрим последовательности подмножеств $T_1, T_2, \ldots, T_k$, содержащие k членов. Другими словами, T_i — подмножество множества $X (T_i \subseteq X)$ при $i = 1 \ldots k$. Из таких подмножеств составляются последовательности фиксированной длины k. Требуется определить, сколько существует различных последовательностей $T_1, T_2, \ldots, T_k$ таких, что $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_k, (T_i \subseteq T_{i+1}$ при $i = 1 \ldots k - 1)$.

- Пусть $n = 4, X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, и $k = 2$.
- Примеры:
  1. $T_1 = \{x_1\}, T_2 = \{x_1, x_4\}$
  2. $T_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, T_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
  3. $T_1 = \{x_2, x_3\}, T_2 = \{x_2, x_3\}$
  4. $T_1 = \varnothing, T_2 = \{x_2\}$

Решение: Как образуются последовательности подмножеств, число которых необходимо определить в задаче.

- Выберем и зафиксируем некоторый элемент x_p множества X, и проследим его «судьбу» в произвольной последовательности подмножеств, удовлетворяющей условию.
- Если x_p содержится в некотором T_q, то этот элемент обязательно содержится в последующих членах последовательности T_{q+1}, T_{q+2}, — это необходимо для выполнения условия вложенности подмножеств $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_k$.
- Чтобы определить в каких подмножествах содержится x_p, достаточно определить первый член последовательности T_m, содержащий этот элемент.
- Члены последовательности до $T_m (T_{m-1}, T_{m-2}$, и т.д.) не содержат x_p; подмножество T_m и последующие члены $(T_{m+1}, T_{m+2}$, и т.д.) содержат.
- Такого подмножества в последовательности может и не найтись в случае, если x_p не содержится ни в одном подмножестве.

Сопоставим каждой последовательности $T_1, T_2, \ldots, T_k$ слово $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ длины n в алфавите $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ из $k+1$ букв:

$$i - \text{я буква слова, } \alpha_i = \begin{cases} m, \text{ минимальный номер подмножества,} \\ \text{содержащего } x_i, \text{ если } x_i \text{ содержится} \\ \text{в каком-то из подмножеств } T_1, \ldots, T_k \\ \\ 0, \text{ если } x_i \text{ не содержится ни в одном} \\ \text{из подмножеств } T_1, \ldots, T_k \end{cases}$$

- Каждой последовательности подмножеств сопоставлено некоторое слово, определённое соответствием:

$$T_1, T_2, \ldots, T_k \to \alpha$$

- По произвольному слову длины n в алфавите из букв $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ можно однозначно определить последовательность подмножеств. Соответствие биективно.

$$T_1, T_2, \ldots, T_k \leftrightarrow \alpha$$

- Рассмотрим частные случаи.
- Пусть $(n = 4), X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $(k = 2)$. Тогда примеры установленного соответствия могут быть такими:
  1. $T_1 = \{x_1\}, T_2 = \{x_1, x_4\} \leftrightarrow \alpha = (1, 0, 0, 2)$
  2. $T_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, T_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \leftrightarrow \alpha = (1, 1, 1, 2)$
  3. $T_1 = \{x_2, x_3\}, T_2 = \{x_2, x_3\} \leftrightarrow \alpha = (0, 1, 1, 0)$
  4. $T_1 = \varnothing, T_2 = \{x_2\} \leftrightarrow \alpha = (0, 2, 0, 0)$
- Каждому слову соответствует в точности одна последовательность подмножеств, удовлетворяющая условию задачи. Тогда искомое число последовательностей равно числу слов длины $n(d = n)$ в алфавите из $k + 1$ буквы $(a = k + 1)$, $a^d = (k + 1)^n$.

Упорядоченные разложения числа n на произвольное число положительных слагаемых

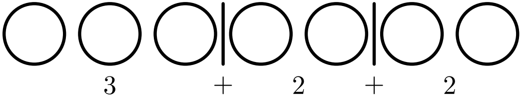
Задача. Дано положительное число n. Рассмотрим всевозможные упорядоченные разбиения его на упорядоченные разложения на произвольное число положительных слагаемых, другими словами, упорядоченные представления числа n в виде суммы произвольного числа положительных слагаемых. Требуется определить, сколько существует различных разбиений.

- Разложения упорядоченные разложения $\to$ порядок слагаемых важен.
- Для числа 3 существует четыре различных разбиения:
  1. $3 = 1 + 1 + 1$
  2. $3 = 1 + 2$
  3. $3 = 2 + 1$
  4. $3 = 3$
- Из-за упорядоченности, разложения под номерами 2 и 3 считаются различными и должны быть учтены отдельно.

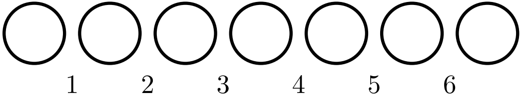
Шары и перегородки

Решение: Представим число n в виде цепочки из n шаров, между которыми можно устанавливать перегородки.

- Расстановкой перегородок цепочка разбивается на части, числа шаров в полученных таким образом частях цепочки соответствуют слагаемым суммы.
- На рисунке — число 7 в виде цепочки из семи шаров.
- Разложение в упорядоченную сумму трёх слагаемых $(7 = 3 + 2 + 2)$ соответствует изображённому расположению двух перегородок.



- Произвольное разбиение n на частей однозначно определяется некоторой единственной расстановкой перегородок в цепочке из n шаров.
- Обратное также справедливо: каждой расстановке перегородок соответствует единственное разбиение n на части.
- Поэтому число разбиений n в точности равно числу различных способов расставить перегородки.
- Определим это число расстановок.
- В цепочке из n шаров есть всего $n-1$ позиций для перегородок.
- В цепочке, содержащей $n=7$ шаров, есть $n-1=6$ позиций для перегородок



- Расстановка перегородок заключается в выборе тех позиций, на которых установлены перегородки — в выборе некоторого подмножества из множества возможных позиций.
- Тогда число различных расстановок перегородок равно числу различных подмножеств множества возможных позиций.
- Следовательно, искомое число способов представить n в виде упорядоченной суммы положительных слагаемых равно числу способов расставить перегородки в цепочке из n шаров, которое, в свою очередь, равно числу различных подмножеств множества позиций для перегородок.
- Множество позиций для перегородок содержит $n-1$ элемент, поэтому существует 2^{n-1} различных подмножеств этого множества.

Слова без повторения букв

Задача. Задан алфавит из a букв, $\{b_1, b_2, \ldots, b_a\}$. Требуется определить число различных слов длины d, не содержащих повторяющихся букв, и обязательно содержащих последовательность $b_1 b_2$.

Решение: Определим способ формирования слов, удовлетворяющих условию задачи.

Пусть в алфавите имеется пять букв $(a = 5)$ и рассматриваются слова длины $4 (d = 4)$. Тогда примеры слов, удовлетворяющих условию задачи:

1. $b_3 b_4 b_1 b_2$
2. $b_4 b_3 b_1 b_2$
3. $b_5 b_1 b_2 b_4$

Примеры слов, *не* удовлетворяющих условию задачи:

1. $b_3 b_4 b_1 b_2 b_3$ — длина слова 5
2. $b_4 b_4 b_1 b_2$ — буква b_4 повторяется
3. $b_1 b_3 b_2 b_4$ — не содержит последовательность $b_1 b_2$

- Каждое искомое слово можно получить следующим образом: сначала составим слово длины $d-2$ (без повторения букв), используя при этом алфавит без первых двух букв, $\{b_3, b_4, \ldots, b_a\}$ (в таком алфавите $a-2$ букв).
- Затем из каждого такого слова получим слова, удовлетворяющие условию задачи.
- Для этого в произвольное место «вставим» последовательность $b_1 b_2$.
- В слове длины d есть $d+1$ позиций для «вставки», поэтому в слове длины $d-2$ это число равно длине слова+1, то есть $(d-2)+1 = d-1$.
- Например, в слове длины 2 есть 2+1 позиций для «вставки»

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & b_5 & \uparrow & b_3 & \uparrow \\ 1 & & 2 & & 3 \\ b_1 b_2 & & b_1 b_2 & & b_1 b_2 \end{array}$$

- Пусть $a = 5, d = 4$.
- Сначала получаем некоторое слово без повторения букв длины $d - 2 = 2$, используя алфавит $\{b_3, b_4, b_5\}$, например $b_5 b_3$.
- В это слово можно «вставить» последовательность $b_1 b_2$ на $d - 1 = 4 - 1 = 3$ позиции и получить 3 различных слова:
  1. $b_1 b_2 b_5 b_3$
  2. $b_5 b_1 b_2 b_3$
  3. $b_5 b_3 b_1 b_2$
- Таким образом, искомое число слов есть число слов длины $d - 2$ без повторений букв в алфавите из $a - 2$ букв, а именно $[a - 2]_{d-2}$, умноженное на число позиций, в которые в каждом таком слове можно "вставить"последовательность $b_1 b_2$, то есть $d - 1$.
- Важно, что при таком формировании слов каждый раз получаются новые слова, поэтому каждое слово будет учтено не более одного раза.
- Кроме того, предложенным способом формируются все слова, удовлетворяющие условию задачи, следовательно, все слова учтены.
- Ответ: $(d - 1) \cdot [a - 2]_{d-2}$

Учёт одинаковых конфигураций

- Иногда требуется определить число конфигураций, которое в точности описывается некоторой известной формулой и при этом, конфигурации, учитываемые в формуле по отдельности, могут считаться одинаковыми в условии задачи, следовательно, должны быть учтены в решении как одна конфигурация.
- При условии дизъюнктивного разбиения и одинакового количества конфигураций в соответствии:
  1. Определяется число конфигураций по известной формуле, N_f.
  2. Определяется, скольким различным конфигурациям в используемой формуле соответствует одна конфигурация условия задачи, r.
  3. Искомое число конфигураций есть $N_z = N_f / r$.

Размещение за круглым столом

Задача. Определить, сколько существует различных способов разместить за круглым столом n человек.
Решение: Предложенное условие задачи не является полным!

- Что же именно требуется найти?
- Какие размещения считать различными?
- Сначала рассмотрим самый простой случай.
- Пусть места за столом занумерованы. Два размещения считаются различными, если хотя бы один человек
  - в одном размещении на месте с одним номером
  - в другом размещении на месте с другим номером

- Будем последовательно заполнять все места за столом.
- Изначально в нашем распоряжении n мест за столом и n человек. На место 1 можно посадить одного из n человек, другими словами, существует n способов его заполнить.
- После этого в распоряжении остаётся $n-1$ мест за столом и $n-1$ человек, которых необходимо разместить. На место 2 можно посадить одного из $n-1$ человек, то есть, существует $n-1$ способ его заполнить.
- И так далее - имеется $n-2$ способа заполнить место 3, $n-3$ способами место 4, и т.п. Последнего человека можно разместить лишь на единственное свободное место n.

  Перемножим числа способов заполнить каждое место:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(n-2)) \cdot (n-(n-1)) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

При условии, что места занумерованы, а размещения считаются различными, если хотя бы один человек сидит на месте с другим номером, существует $n!$ различных размещений.

- Пусть теперь места за столом НЕ занумерованы, а размещения считаются различными, если хотя бы у одного человека меняется сосед слева ИЛИ справа.
- Другими словами, два размещения различны, если хотя бы для одного человека:
  - В одном размещении сосед справа R, сосед слева L
  - В другом размещении сосед справа не R ИЛИ сосед слева не L

1. Различных, в смысле предыдущей задачи размещений $N_f = n!$
2. Определим r, число различных размещений в смысле предыдущей задачи, соответствующих одному размещению рассматриваемой задачи.
3. Поскольку в рассматриваемой задаче места за столом не занумерованы, то размещения предыдущей задачи, которые переходят друг в друга поворотами вокруг оси стола, соответствуют единственному размещению рассматриваемой задачи.
4. Следовательно, $r = n$.
5. Таким образом, получаем ответ $N_z = N_f / r = n!/n = (n-1)!$

Разбиение на пары

Задача. Вычислить, сколькими способами можно разбить на пары $2n$ человек. Порядок формирования пар не важен, порядок внутри пар также не важен.

- Ищем число пар, если бы каждое положение в размещении было занумеровано.
- Рассмотрим $2n$ занумерованных мест.
- Число способов разместить $2n$ человек на $2n$ мест равно числу перестановок $2n$ элементов. Итак, $N_f = (2n)!$.
- В условии рассматриваемой задачи пары не различимы — разбиения на пары с занумерованными местами, которые можно получить перестановкой пар местами будут соответствовать одному разбиению в рассматриваемой задаче.
- Пар n штук, следовательно, различных перестановок пар $n!$.

- Пусть, например, $n = 3$. Рассмотрим различные разбиения на пары при условии, что места занумерованы:
  1. $(1,2),(3,4),(5,6)$
  2. $(1,2),(5,6),(3,4)$
  3. $(3,4),(1,2),(5,6)$
  4. $(3,4),(5,6),(1,2)$
  5. $(5,6),(1,2),(3,4)$
  6. $(5,6),(3,4),(1,2)$
- Все эти разбиения соответствуют единственному разбиению в смысле решаемой задачи, и получены перестановкой пар. Таких разбиений $n! = 3! = 6$.
- Перестановки внутри пар с занумерованными местами также не изменяют разбиение в смысле рассматриваемой задачи.
- Есть 2 способа разместить людей внутри одной пары. Для n пар существует 2^n способов переставлять людей внутри пар, не изменяя при этом разбиение в смысле рассматриваемой задачи.

- Для $n = 3$ рассмотрим различные разбиения на пары при условии, что места занумерованы:
  1. $(1, 2), (3, 4), (5, 6)$
  2. $(2, 1), (3, 4), (5, 6)$
  3. $(1, 2), (4, 3), (5, 6)$
  4. $(2, 1), (4, 3), (5, 6)$
  5. $(1, 2), (3, 4), (6, 5)$
  6. $(2, 1), (3, 4), (6, 5)$
  7. $(1, 2), (4, 3), (6, 5)$
  8. $(2, 1), (4, 3), (6, 5)$
- Все эти разбиения соответствуют единственному разбиению в смысле решаемой задачи, и получены перестановкой внутри. Разбиений $2^n = 2^3 = 8$
- Других изменений занумерованных разбиений на пары, которые не изменяют разбиение в смысле рассматриваемой задачи, нет.
- Следовательно, каждому разбиению в смысле рассматриваемой задачи соответствует $n! \cdot 2^n$ занумерованных разбиений на пары, то есть, $r = n! \cdot 2n$.
- Тогда искомый ответ есть $N_z = \dfrac{N_f}{r} = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$

Считаем количество исходов жеребьёвки кубков УЕФА

- В $1/4$ финала Лиги Чемпионов УЕФА нет деления команд по национальному признаку, и любая из восьми команд может встретиться с любой командой.
- В этом случае $2n = 8$
- При $n = 4$ число возможных исходов жеребьёвки

$$\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n} = \frac{8!}{4! \cdot 2^4} = 105$$

Сочетания

- Иногда удобнее вести вычисления в другой нотации.
- Например, задача неупорядоченного выбора k предметов из n настолько частая, что такое число носит название числа размещений и имеет обозначение
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
и называется числом размещение из n по k.
- Разложив это число в виде произведения $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)$ узнаём знакомую формулу $[n]_k$.
- Если нужно упорядочить эти k предметов, требуется разделить на $k!$, получив
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
.
- Это называется числом сочетаний из n по k.

Шары и перегородки

- Ещё раз рассмотрим n шаров и k перегородок.
- Сколькими способами мы можем разместить перегородки между шарами, чтобы разбить те на ровно $k+1$ непересекающихся непустых множеств?
- Пусть имеется шесть шаров и три перегородки.
- Несколько возможных разбиений:

  0|0|0 0|0 0
  0|0|0 0 0|0

  Как свести задачу к сочетаниям или размещениям?

Шары и перегородки

- Имеется ровно пять мест, на которые можно положить перегородки.
- Всего имеется три перегородки.
- Ответ: C_5^3.

Шары и перегородки

Мы решили следующую задачу:

Задача. Имеется k занумерованных ящиков. Сколькими способами можно положить в них n одинаковых предметов, чтобы ни один из ящиков не остался пустым.

- Сводим дело к предыдущей задаче:
- Кладём n предметов в ряд.
- Располагаем между ними $k-1$ перегородку так, чтобы они не оказались на одном месте.
- Считаем C_{n-1}^{k-1}.
- Заодно мы решили задачу, сколькими способами можно разложить натуральное число n на сумму k натуральных чисел.

Шары и перегородки

- Как решить задачу, если допускается оставлять ящики пустыми?

Шары и перегородки

- Как решить задачу, если допускается оставлять ящики пустыми?
- Вариант первый: зарезервируем $n + k - 1$ мест под шары и перегородки.
- На любые из этих мест положим перегородки.
- Докажем, что любая такая расстановка будет однозначно определять расположения шаров по ящикам.
- Действительно, все шары, которые лежат до первой перегородки, положим в первый ящик, находящиеся между первой и второй перегородками — во второй ящик, и так далее.
- При этом если перегородки стоят рядом, значит, ящик остался пустым, что допускается.
- Поэтому искомое количество способов — это C_{n+k-1}^{k-1} — выбрать $k - 1$ место из $n + k - 1$ для перегородок, а шары ставятся однозначно.

Шары и перегородки

- Как решить задачу, если допускается оставлять ящики пустыми?
- Вариант второй.
- Сопоставим каждому расположению n шаров по ящикам такое расположение $n+k$ шара по тем же ящикам, чтобы при этом не оставалось пустых ящиков: добавим в каждый ящик по одному шару.
- Такое соответствие будет биективным, поэтому и количество способов у них совпадает.
- Но количество способов разложить шары, чтобы не было пустых ящиков, мы считали в предыдущей задаче: их C_{n+k-1}^{k-1}