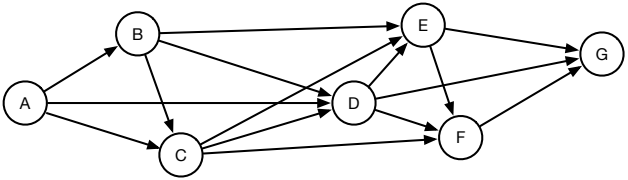
# Язык С. Введение в алгоритмы и структуры данных.

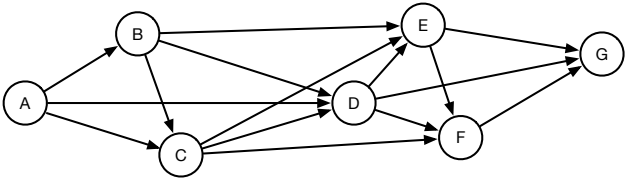
## Лекция 14
## Динамическое программмирование

Сергей Леонидович Бабичев

**Задача 1.** Найти количество маршрутов из пункта $A$ в пункт $G$.



**Задача 2.** Найти количество маршрутов из пункта $A$ в пункт $G$.




**Решение.**
Обозначим число маршрутов из $A$ до $i$ как $F(i)$. Тогда:

- $F(G) = F(F) + F(E) + F(D)$, так как доехать в $G$ можно из $F$, $E$, и $D$ общее число есть сумма способов.
- $F(F) = F(E) + F(D) + F(C)$
- $F(E) = F(D) + F(C) + F(B)$
- $F(D) = F(C) + F(B) + F(A)$
- $F(C) = D(B) + F(A)$
- $F(B) = F(A)$ и $F(A) = 1$

Ответим на несколько вопросов:

- Разбивается ли задача на подзадачи? Да. Решение $F(G)$ требует решения $F(F)$, $F(E)$, $F(D)$ и т.д.
- Решаются ли подзадачи тем же методом, что и основная? Да. Вычисление $F(F), \ldots$ аналогично.
- Достаточно ли для решения задачи иметь только решения подзадач и потом вычислить результат? Да. Нужно сложить результаты.
- Каждая из подзадач проще основной? Да. Но немного. Каждая подзадача на единицу ближе ко входу, чем задача.
- Имеются ли подзадачи, решаемые без рекурсии? Да. $F(A)$.
- Совпадают ли часть подзадач в решении задачи? Да. Одни и те же подзадачи повторяются в списке по несколько раз.

Тогда это — *задача динамического программирования*.

# Отличие задач ДП от *разделяй и властвуй*

Мы изучили сортировку слиянием. Задача ли это динамического программирования или задача *разделяй и властвуй*? Ответим на те же вопросы.

- Разбивается ли задача на подзадачи? Да. Массив разбивается на два подмассива.
- Решаются ли подзадачи тем же методом, что и основная? Да. Подмассивы можно сортировать тем же методом.
- Достаточно ли для решения задачи иметь только решения подзадач и потом вычислить результат? Да. Нужно слить два подмассива.
- Каждая из подзадач проще основной? Да. И намного. Каждая подзадача в два раза меньше основной.
- Имеются ли подзадачи, решаемые без рекурсии? Да. Когда размер массива меньше порогового, мы используем простую сортировку.
- Совпадают ли часть подзадач в решении задачи? Нет. Каждая подзадача — уникальна и они не пересекаются совсем.

# Отличие задач ДП от *разделяй и властвуй*

- Эти два пункта отличия принципиальны.
- Если подзадача намного проще основной задачи — нет смысла сохранять её решение для последующего использования.
- Если подзадачи не совпадают — нет смысла сохранять решения подзадач для последующего использования.
- Если же подзадача *немного* проще задачи и эти подзадачи при решении частично совпадают — имеет смысл сохранять решения подзадач и не решать их повторно.

**Задача 3.** Функция задана рекуррентной последовательностью:

$$f(n) = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 0, \\ 1, \text{ если } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2), \text{ если } n > 1. \end{cases}$$

Найти $f(5)$.

# Рекуррентность и рекурсия

Рекуррентная форма $\rightarrow$ рекурсивный алгоритм

```
int f(int n) {
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  return f(n-1) + f(n-2);
}
```

# Рекуррентность и рекурсия

Рекуррентная форма $\rightarrow$ рекурсивный алгоритм

```
int f(int n) {
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  return f(n-1) + f(n-2);
}
```

Три вопроса:

1. Корректен ли он? — Да, так как это просто другая запись.
2. Как оценить его сложность?
3. Как его ускорить?

# Оценка сложности

Второй вопрос — сложность алгоритма.
Добавим в программу одну строку — *трассировку исполнения.*

```
int f(int n) {
  printf("f(%d)\n", n);
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  return f(n-1) + f(n-2);
}
```

# Оценка сложности: прогон программы.

```
$ ./a.out
f(5)
f(4)
f(3)
f(2)
f(1)
f(0)
f(1)
f(2)
f(1)
f(0)
f(3)
f(2)
f(1)
f(0)
f(1)
$
```

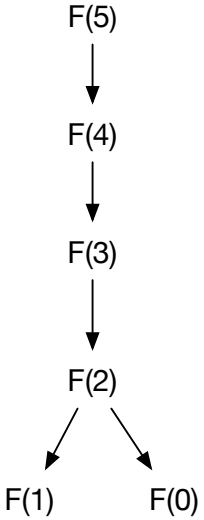
# Как ускорить?

- Почему так медленно?
- Мы много раз повторно вычисляем значение функции от одних и тех же аргументов.

- Третий вопрос: можно ли уменьшить сложность алгоритма по времени, то есть ускорить алгоритм?
- Да. Надо просто запоминать результаты вычислений.
- Если мы уже вызывали функцию от этого аргумента, нужно это проверить и вернуть нужный результат.

```
int f(int n) {
  enum {MAXN = 100};
  static int c[MAXN];
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  if (c[n] > 0) return c[n];
  return c[n] = f(n-1) + f(n-2);
}
```

# Дерево вызовов модифицированной функции для $n = 5$



# Решение задачи о количестве маршрутов

- Абсолютно каждая задача на динамическое программирование может быть представлена в рекурсивном виде.
- Этот рекурсивный вид называется «уравнением Беллмана» задачи.
- Ричард Беллман — основатель раздела математики «динамическое программирование».

# Уравнение Беллмана для задачи о количестве маршрутов

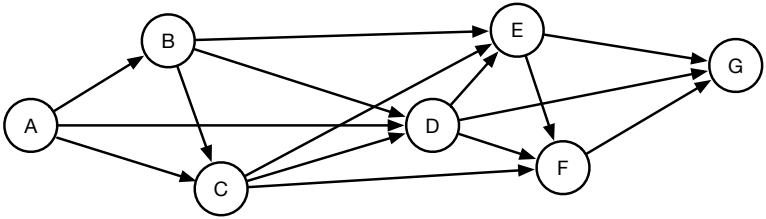
Пусть $A$ — матрица смежности,

$$A[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если имеется прямой путь из } i \text{ в } j \\ 0, & \text{если не имеется прямого пути из } i \text{ в } j. \end{cases}$$

Тогда:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} F(i) \cdot A[i,x]$$

Дорожный граф и его матрица смежности.




$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Задача о возрастающей подпоследовательности наибольшей длины.

# Задача о возрастающей подпоследовательности наибольшей длины

- Имеется последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ называется возрастающей, если

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$$

и

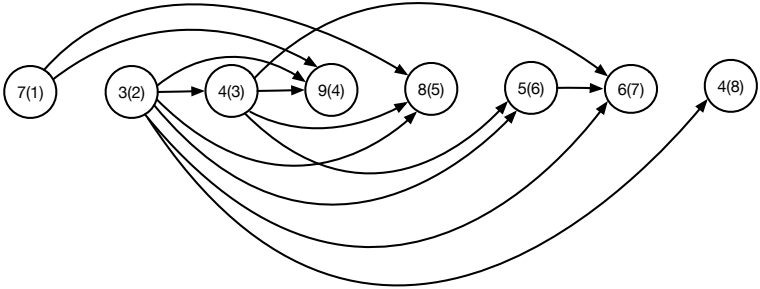
$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$$

- Требуется найти максимальную длину возрастающей подпоследовательности.

Пример: $a_i = \{7, 3, 4, 9, 8, 5, 6, 4\}$.
Одна из возрастающих подпоследовательностей есть $\{7, 9\}$.
$\{3, 4, 5, 6\}$ есть возрастающая подпоследовательность наибольшей длины.

# Задача о возрастающей подпоследовательности

- Соединим направленными рёбрами элементы, которые могут быть друг за другом в подпоследовательности.




- Задача — найти не количество путей, а длину наибольшего пути.

# Задача о возрастающей последовательности

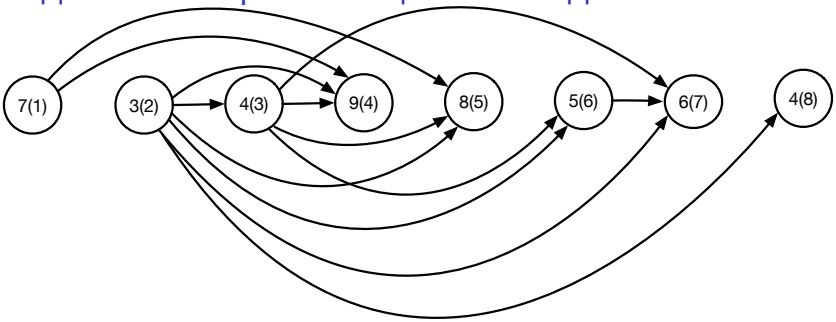
- В задаче на количество путей консолидация подзадач имела вид

$$R_i = \sum_{i=1}^{N_{R_{i-1}}} R_{i-1}$$

- В этой задаче длина наибольшего пути к вершине $i$ есть максимум из наибольших путей к предыдущим вершинам плюс единица

$$L_i = 1 + \max_{j=1}^{N_{L_{i-1}}} (L_{i-1,j})$$

# Задача о возрастающей последовательности




$$
\begin{aligned}
L_8 &= 1 + \max(L_2) \\
L_7 &= 1 + \max(L_2, L_3, L_6) \\
L_6 &= 1 + \max(L_2, L_3) \\
L_5 &= 1 + \max(L_1, L_2, L_3) \\
&\dots \\
L_1 &= 1
\end{aligned}
$$

# Задача о возрастающей последовательности

- Рекурсивно эта задача решается следующей программой:

```
int f(int a[], int N, int k) { // k - # of element
   int m = 0;
   for (int i = 0; i < k-1; i++) { // for lefts
      if (a[i] < a[k]) { // Is there a path?
         int p = f(a,N,i); // It's length
         if (p > m) m = p; // m = max(m,p)
      }
   }
   return m+1;
}
```

# Задача о возрастающей последовательности

- Для последовательности $\{1, 4, 2, 5, 3\}$ решение будет таким:
  - $f_5 = 1 + \max(f_1, f_3)$
  - $f_4 = 1 + \max(f_1, f_2, f_3)$
  - $f_3 = 1 + \max(f_1)$
  - $f_2 = 1 + \max(f_1)$
  - $f_1 = 1$
  - Возвращаемся назад
  - $f_2 = 1 + \max(f_1) = 2$
  - $f_3 = 1 + \max(f_1) = 2$
  - $f_4 = 1 + \max(f_1, f_2, f_3) = 3$
  - $f_5 = 1 + \max(f_1, f_3) = 3$

  Решение есть $\max(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = 3$

# Задача о возрастающей последовательности

- Чтобы повторно не решать решённые подзадачи вводим массив $c$ размером $N$, хранящий значения вычисленных функций. Начальные значения его равны нулю.

```
int f(int *a, int N, int k, int *c) {
   if (c[k] != 0) return c[k]; // Already solved
   int m = 0;
   for (int i = 0; i < k; i++) {
      if (a[i] < a[k]) {
         int p = f(a,N,i,c);
         if (p > m) m = p; // m = max(m,p)
      }
   }
   return c[k] = m+1; // Put to cache and return
}
```

# Рекурсия как база динамического программирования.

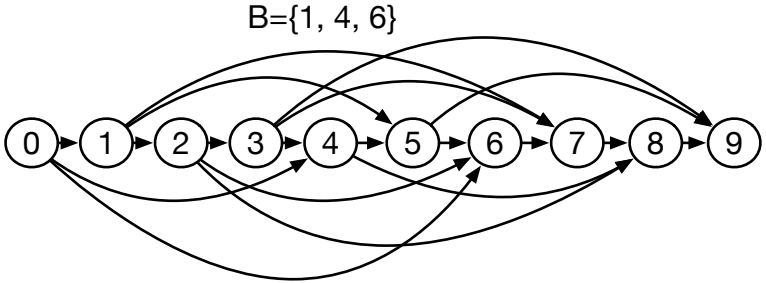
# Рекурсия как база динамического программирования

- Пусть в банкомате имеется неограниченное количество банкнот $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ заданных номиналов.
- Задача заключается в том, чтобы выдать требуемую сумму денег наименьшим количеством банкнот.

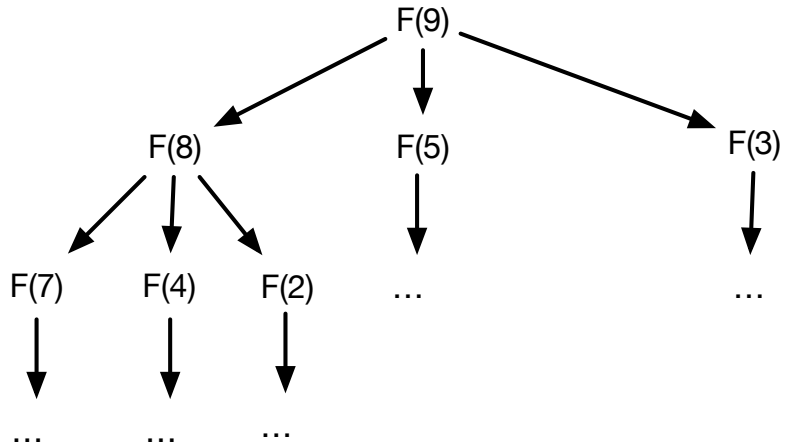
# Задача о банкомате

- Жадное решение имеется только для некоторого набора $b_i$.
- Например, при $b = \{1, 6, 10\}$ и $x = 12$ жадное решение даст ответ 3 $(10 + 1 + 1)$, хотя существует более оптимальное решение 2 $(6 + 6)$.
- Для набора $b = \{6, 10\}$ жадный алгоритм решения не найдёт.

# Задача о банкомате: граф



# Задача о банкомате: дерево рекурсии



# Задача о банкомате: уравнение Беллмана

$$f(x) = \begin{cases} \min\limits_{i=1,n}\{f(x-b_i)\}+1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ \infty, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

# Задача о банкомате: простая рекурсия

$$f(x) = \begin{cases} \min\limits_{i=1,n}\{f(x-b_i)\}+1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ \infty, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

```
const int GOOGOL = 999999999;
int f(int x, int b[], int n) {
   if (x < 0) return GOOGOL;
   if (x == 0) return 0;
   int min = GOOGOL;
   for (int i = 0; i < n; i++) {
      int r = f(x - b[i], b, n);
      if (r < min) min = r;
   }
   return min + 1;
}
```

# Задача о банкомате: борьба с излишней рекурсией

- Глубина рекурсии не превосходит $\dfrac{x}{\min\limits_{i=1,n} b_i}$
- Количество рекурсивных вызовов растёт по экспоненте.
- Если при $b = \{1, 4, 6\}$ и $x = 30$ количество рекурсивных вызовов 285709, то для $x = 31$ оно уже 418729, а для $x = 40$ оно равно 597124768.

# Задача о банкомате: борьба с излишней рекурсией

- Нам помогает сохранение промежуточных результатов.

```
const int GOOGOL = 999999999;
int f(int x, int *b, int n, int *cache) {
   if (x < 0) return GOOGOL;
   if (x == 0) return 0;
   if (cache[x] >= 0) return cache[x];
   int min = GOOGOL;
   for (int i = 0; i < n; i++) {
      int r = f(x - b[i], b, n, cache);
      if (r < min) min = r;
   }
   return cache[x] = min + 1;
}
```

# Задача о банкомате: борьба с излишней рекурсией

- Массив $cache$, передаваемый в функцию решения должен быть подготовлен.
- Мы должны узнать, решалась ли эта задача ранее.
- Инициализация массива проводится элементами, которые не могут быть результатом решения задачи.
- Размер массива должен соответствовать $x$.

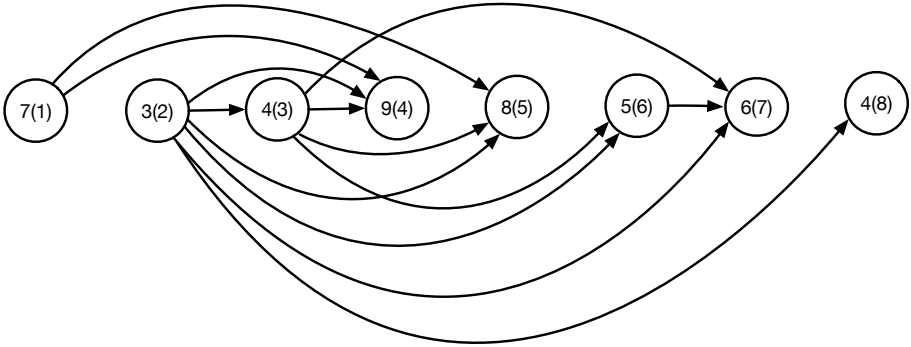
# Нерекурсивный вариант решения – восходящее решение

- Решая задачу, мы замечаем, что аргументы функции располагаются «плотно» и между ними нет промежутков.
- В таких случаях короче получается вариант, когда мы вычисляем значения функции «снизу вверх».
- Для этого мы заполняем такой же массив ответов, но уже без рекурсии.

# Уход от рекурсии. Восходящее решение.

# Восходящее решение

- Вернёмся к задаче о возрастающей подпоследовательности.

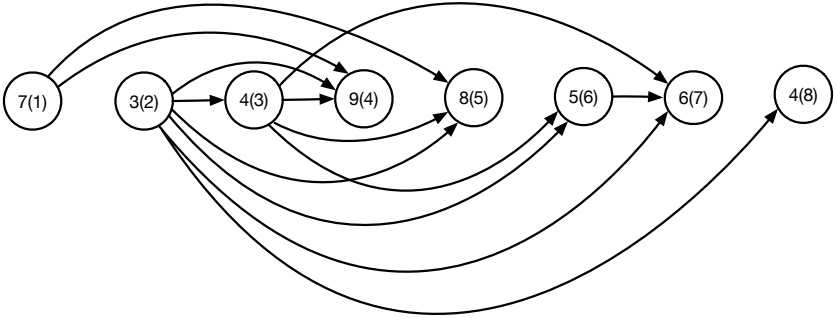



- При нисходящем решении нам требуется находить максимум из всех значений функций от $F(1)$ до $F(N)$, для чего рекурсивный вызов должен опуститься от $F(N)$ до $F(1)$.
- Для больших $N$ уровень рекурсивных вызовов может превысить разумные рамки (размер стека в программах ограничен).

# Восходящее решение

- При восходящем решении мы пробуем решать подзадачи *до того*, как они будут поставлены.
- Решая задачи в возрастающем порядке мы достигаем следующих целей:
  1. Гарантируется, что все задачи, решаемые позже, будут зависеть от ранее решённых.
  2. Не потребуются рекурсивные вызовы.
- Обязательное условие: монотонность аргументов при решении подзадач, если $f(k)$ — подзадача для $f(n)$, то $M(k) < M(n)$, где $M(x)$ есть некая метрика сложности решения.

# Восходящее решение




- F(1) = F(2) = 1
- F(3) = max(F(2)) + 1 = 2
- F(4) = max(F(1),F(2),F(3)) + 1 = 3
- ...
- F(8) = max(F(2))+1 = 2

После получения значений $F(i)$ не требуется вызывать функцию, можно использовать уже вычисленное значение.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
    int n; scanf("%d", &n);
    int *b = calloc(n, sizeof(int));
    for (int i = 0; i < n; i++) scanf("%d", b+i);
    int x; scanf("%d", &x);
    int *cache = calloc(x+1, sizeof (int));
    for (int i = 1; i <= x; i++) cache[i] = 9999999;
    cache[0] = 0;
    for (int i = 0; i <= x; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (cache[i] + 1 < cache[i+b[j]])
                cache[i+b[j]] = cache[i] + 1;
        }
    }
    printf("%d\n", cache[x]);
    free(cache); free(b);
}
```

# Восходящее решение

- Восходящее решение не всегда оправдано.
- Пусть решение задачи определяется таким образом:

$$F(n) = \max(F((n+1)/2), F(n/3)) + 1$$

$$F(0) = F(1) = 1$$

- Это описывает какую-то последовательность.
- При нисходящем способе для $F(8)$ мы получаем:
- F(8) = max(F(4),F(2))+1
- F(4) = max(F(2),F(1))+1
- F(2) = max(F(1),F(0))+1=2
- F(4) = 3
- F(8) = 4

# Восходящее решение

- При попытке решить задачу восходящим решением мы получим:
- F(0)=F(1)=1
- F(2)=max(F(1),F(0))+1=2
- F(3)=max(F(2),F(1))+1=3
- F(4)=max(F(2),F(1))+1=3
- F(5)=max(F(3),F(1))+1=3
- F(6)=max(F(3),F(2))+1=3
- F(7)=max(F(4),F(2))+1=4
- F(8)=max(F(4),F(3))+1=4
- Значения F(3),F(5),F(6),F(7) были вычислены зря.

# Восходящее решение

- Поставленная задача более подходила под рекурсивный алгоритм с запоминанием промежуточных результатов (*memoizing*).
- Нисходящее решение $F(N)$ имеет сложность $O(\log N)$.
- Восходящее решение $F(N)$ имеет сложность $O(N)$.

# Восходящее решение vs нисходящее

- Восходящее решение по алгоритмической корректности эквивалентно нисходящему.
- Необходимо обеспечить вычисление в соответствующем порядке.
- При простом целочисленном аргументе вычисления можно проводить в порядке увеличения аргумента.
- Восходящее решение требует меньшего размера стека, но может решать задачи, ответ на которые не понадобится при решении главной задачи.

# Восстановление решения

# Задача о банкомате: нахождение банкнот

- Мы искали решение задачи минимизации.
- До сих пор нас интересовал только ответ, значение минимума.
- Мы его получили.
- Мы не получили, какие именно банкноты требуется выдать.

# Задача о банкомате: нахождение банкнот

- Мы искали решение задачи минимизации.
- До сих пор нас интересовал только ответ, значение минимума.
- Мы его получили.
- Мы не получили, какие именно банкноты требуется выдать.

- Имеется несколько подходов к получению детального решения:
  - Каждый раз при нахождении решения подзадачи мы сохраняем историю его получения.
  - Зная ответ, мы повторяем решение, воссоздавая историю получения.

# Задача о банкомате: восстановление решения

Первый способ: сохранять цепочку вызовов.

- Потребуется: иметь список банкнот для каждого промежуточного решения.
- Всего промежуточных решений может быть $N$.
- Каждое из решений имеет различную длину (вектор).
- Потребуется $N$ векторов.
- Явно, что всё потреюует много памяти и времени.

# Задача о банкомате: восстанавливаем решение

- Зная ответ и имея кэш-таблицу, можно восстановить решение.
- Предположим, что мы знаем, что точный ответ при заданных начальных значениях есть 7.
- Тогда возникает вопрос: какой предыдущий ход мы сделали, чтобы попасть в заключительную позицию?
- Введём термин *ранг* для обозначения наименьшего числа ходов, требуемого для достижения текущей позиции из начальной.
- Тогда каждый ход решения всегда переходит в позицию с рангом, большим строго на единицу.

# Задача о банкомате: восстанавливаем решение

- Восстановление решения по таблице ответов:
  1. Заключительная позиция имеет ранг $k$.
  2. Делаем позицию текущей.
  3. Если текущая позиция имеет ранг 0, то это — начальная позиция и алгоритм завершён.
  4. Рассматриваем все позиции, ведущие в текущую и выбираем из них произвольную с рангом $k-1$.
  5. Запоминаем ход, приведший к из позиции ранга $k-1$ в ранг $k$.
  6. Понижаем ранг: $k \to k-1$ и переходим к 2.

# Задача о банкомате: восстанавливаем решение

```
void buildSolution(int x, int *b, int n, int *cache){
   vector<int> ret;
   for (int k = cache[x]; k >= 0; k--) {
      for (int i = 0; i < n; i++) {
         int r = x - b[i];
         if (r >= 0 && cache[r] == k-1) {
            x = r;
            printf("%d ", b[i]);
            break;
         }
      }
   }
   return ret;
}
```

# Решение задачи о банкомате: восстановление

Третья возможность: добавить ещё один кэш, сохраняющий номинал лучшей банкноты при лучшем решении.

```
const int GOOGOL = 999999999;
int f(int x, int *b, int n,
 int *cache, int *bestnote) {
  if (x < 0) return GOOGOL;
  if (x == 0) return 0;
  if (cache[x] >= 0) return cache[x];
  int min = GOOGOL, best = -1;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int r = f(x - b[i], b, n, cache, bestnote);
    if (r < min) {
      min = r;
      bestnote[x] = b[i];
    }
  }
  return cache[x] = min + 1;
}
```

# Решение задачи о банкомате: восстанавливаем решение

Теперь для того, чтобы получить нужные для размена банкноты для суммы в `x`, достаточно пробежаться по кэшу банкнот:

```
while (x > 0) {
  // output bestnote[x];
  x -= bestnote[x];
}
```